V OMOC **NÍVEL I**

PRIMEIRA LISTA DE TREINAMENTO- 2º FASE (SOLUÇÕES)

OMOC

OLÍMPIADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

https://omocuffs.weebly.com/

QUESTÃO 1:

Na fruteira de Angélica existem 12 bananas, 1 abacaxi, 4 laranjas, 2 mangas e 3 mamões. O peso de 1 abacaxi é o mesmo que o peso de 1 laranja, 1 manga e 1 mamão, juntos; o peso de 1 banana é a metade do peso de 1 mamão; 4 bananas pesam o mesmo que 1 laranja e 1 manga, juntas; e 1 manga pesa 100g a mais que 1 laranja. Se 1 abacaxi pesa 600g, então:

a) **Quanto pesam todas as frutas da fruteira de Angélica?**

SOLUÇÃO: Vamos organizar as informações:

I) 1 laranja + 1 manga + 1 mamão = 1 abacaxi (600g);

II) 2 bananas = 1 mamão;

III) 1 laranja + 1 manga = 4 bananas;

IV) 1 manga = 1 laranja + 100g

Em (I) trocando laranja, manga e mamão, usando (II) e (III), chegamos que 6 bananas equivalem a um abacaxi, ou seja, cada banana pesa 100g e, consequentemente, cada mamão pesa 200g e uma laranja e uma manga juntas pesam 400g, que, por (IV), é possível concluir que cada manga pesa 250g e cada laranja pesa 150g. Sendo assim, o peso de todas as frutas é 12×100 + 600 + 4×150 + 3×200 = 3,500g, que é o mesmo que 3,5kg.

b) **De quantas maneiras Pedro, neto de Angélica, pode escolher 2 frutas diferentes para tomar seu café da manhã, utilizando as frutas da fruteira?**

SOLUÇÃO 1: São 5 tipos de frutas para escolher duas, ou seja, banana e mamão; banana e manga; banana e abacaxi; banana e laranja; mamão e manga; mamão e abacaxi; mamão e laranja; manga e abacaxi; manga e laranja; e, por fim, abacaxi e laranja. Sendo assim, Pedro pode escolher duas frutas diferentes de **10 maneiras**.

SOLUÇÃO 2: Outra forma de encontrar este resultado, sem precisar listar todas as possibilidades é 5×4÷2 = 10, que significa que temos 5 opções para a primeira fruta, 4 para a segunda e, como a ordem com a qual escolhemos primeira e segunda frutas não importa, dividimos o resultado por 2.

QUESTÃO 2:

No jogo Pebola, duas equipes disputam para ver quem faz mais pontos. Existem duas formas de pontuar: o gol que vale 3 pontos e o toque-baixo que vale 7 pontos.

Mostre que não é possível obter exatamente 11 pontos numa partida de Pebola.

SOLUÇÃO: Primeiro note que se pontuarmos 7 pontos duas ou mais vezes já passaríamos de 11 pontos. Se pontuarmos apenas uma vez com 7 pontos, teríamos que fazer 4 pontos em jogadas de 3 pontos, mas isto não é possível, pois 4 não é múltiplo de 3. Se não tivermos nenhuma pontuação de 7 pontos, então teríamos que obter 11 pontos exclusivamente com jogadas de 3, mas isto também não é possível uma vez que 11 não é múltiplo de 3.

QUESTÃO 3:

Três prisioneiros (com excelentes habilidades em lógica Matemática) têm a chance de sair da prisão. Um deles enxerga bem com os dois olhos, o outro com somente um olho e o terceiro é cego.

O carcereiro falou aos prisioneiros que entre três chapéus brancos e dois vermelhos, pegaria três e colocaria sobre as cabeças deles, mas não permitiria que ninguém olhasse a cor do chapéu sobre a própria cabeça, apenas os dos outros presos. O carcereiro reuniu os três prisioneiros com os chapéus na cabeça e ofereceu-lhes a liberdade, desde que algum deles soubesse a cor do chapéu na própria cabeça. O primeiro prisioneiro a falar foi o enxergava com os dois olhos.

a) **Qual seria a situação que poderia garantir ao primeiro prisioneiro acertar o chapéu que ele usava?**

SOLUÇÃO: A única possibilidade seria ele ter visto dois chapéus vermelhos nas cabeças dos demais. Perceba que se o primeiro prisioneiro não ver dois chapéus de cor vermelha nos demais prisioneiros, ele **não** saberá a cor do próprio chapéu.

b) **O primeiro prisioneiro negou saber a resposta. Assim, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho. Quais as cores que ele precisaria ver nos chapéus dos outros presos que permitiria que ele acertasse a cor do seu próprio chapéu? Nesse caso, qual deveria ser essa cor?**

SOLUÇÃO: Como o primeiro prisioneiro não soube a resposta, os outros dois prisioneiros possuem dois chapéus brancos ou um branco e um vermelho. Para o segundo prisioneiro acertar, ele precisaria ver

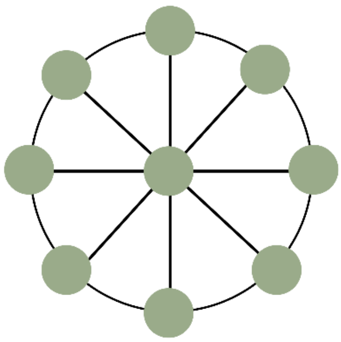
1) Dois chapéus vermelhos, e assim o que está em sua cabeça é branco; ou
2) Chapéu vermelho na cabeça do prisioneiro cego para concluir que o da própria cabeça só poderia ser branco, pois se fosse vermelho, o primeiro prisioneiro teria acertado.

a) **Levando em consideração que o primeiro e o segundo prisioneiros não souberam responder, o carcereiro nem se preocupou em fazer a pergunta ao prisioneiro cego, mas esse afirmou que sabia a cor do chapéu na própria cabeça. Qual era essa cor?**

SOLUÇÃO: Como o segundo prisioneiro não soube responder, então o prisioneiro cego não estava de chapéu vermelho (**pelo item 2**). Portanto, ele só poderia ter chapéu **branco**.

QUESTÃO 4:

Na figura abaixo, temos uma circunferência cortada por 4 segmentos de retas. Escreva os números de 1 até 9 nos círculos de modo que a soma dos números escritos em cada segmento de reta seja sempre a mesma.

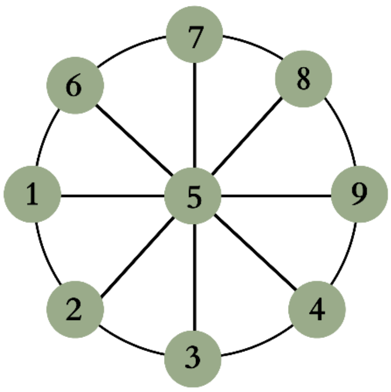


SOLUÇÃO: Observe que as somas dos números em círculos diametralmente opostos devem ser iguais, pois todos os segmentos compartilham o círculo central. Desconsiderando-se o centro, a soma dos oito números escritos na circunferência deve ser divisível por 4, pois eles podem ser distribuídos em 4 pares de mesma soma. A soma total é

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45}$$

Escolhendo-se o 5 como número central, os outros números podem ser distribuídos nos seguintes pares de soma 10: (1,9); (2,8); (3,7) e (4,6).

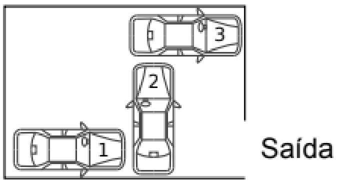
Uma possível distribuição seria:



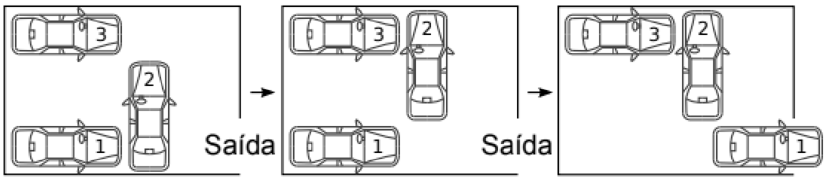
Observação: Além do 5, os números 9 e 1 também poderiam ocupar o centro, pois 45 – 9 = 36 e 45 – 1 = 44 também são múltiplos de 4. Para colocarmos o 9 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma 36 ÷ 4 = 9: (1,8); (2,7); (3,6) e (4,5). Para colocarmos o 1 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma 44 ÷ 4 = 11: (2,9); (3,8); (4,7) e (5,6).

QUESTÃO 5:

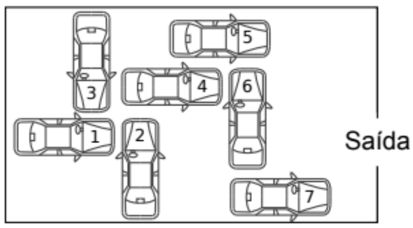
Num certo estacionamento, os automóveis foram estacionados conforme mostra a figura (de maneira bastante apertada!). O motorista do carro número 1 pede educadamente para que os outros motoristas se movam para que ele possa sair do estacionamento. Um carro se move por vez e, devido ao estreito espaço para manobrar, cada carro se move apenas para frente ou para trás.



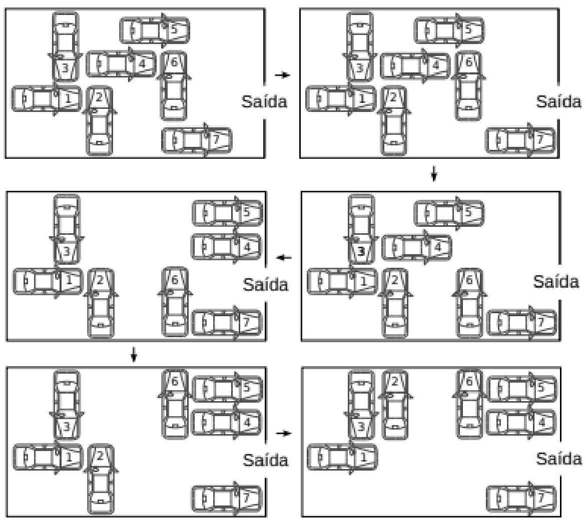
Logo, para que o carro 1 possa sair, os carros foram movimentados na seguinte ordem: 3-2-1, como se vê na sequência de desenhos abaixo:



a) **Dada a situação de carros estacionados abaixo, descreva uma sequência de seis movimentos de carros de tal forma que o carro 1 possa sair do estacionamento.**



SOLUÇÃO: Uma sequência possível de movimentos que permite que o carro 1 saia do estacionamento é a seguinte: 7 →, 6 ↓, 4 →, 5 →, 6 ↑, 2 ↑. A figura abaixo ilustra essa sequência de movimentos.



Observe que poderíamos ter movimentado o carro 4 e depois o carro 5, ou poderíamos ter movimentado o carro 5 e depois o carro 4. E também poderíamos ter movimentado o carro 2 antes do carro 6 nos dois últimos passos.

QUESTÃO 6:

Mirtes trabalha num setor com mais sete colegas, sendo, portanto, oito ao todo. No dia 1º de janeiro, Mirtes comenta que neste ano dois dos funcionários do setor farão aniversário no mesmo dia da semana, pois há sete dias em uma semana e oito colegas.

a) **Usando esta ideia de Mirtes, descubra qual é o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que duas pessoas tenham o mesmo signo.**

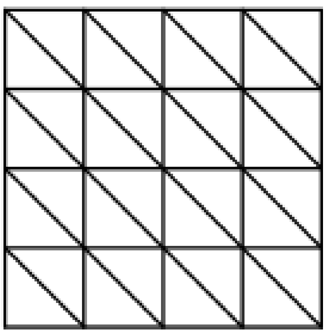
SOLUÇÃO: São doze signos. Logo, para garantir que duas têm o mesmo signo, bastam treze pessoas!

b) **Qual o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que pelo menos quatro deles fizessem aniversário no mesmo dia da semana neste ano?**

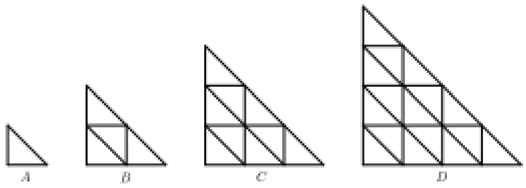
SOLUÇÃO: São sete os dias da semana. Logo, para garantir que pelo menos quatro fazem aniversário no mesmo dia da semana neste ano, vamos precisar de $3 \times 7 + 1 = 22$ pessoas!

QUESTÃO 7:

Quantos triângulos existem na figura abaixo?



SOLUÇÃO: Como todos os segmentos traçados são paralelos aos lados do quadrado ou à diagonal, os triângulos formados também possuem essas características.
Assim, existem apenas quatro tipos de triângulos:



Os quatro tipos de triângulos foram definidos de acordo com a quantidade de triângulos menores: 1 na figura A, 4 na figura B, 9 na figura C e 16 na figura D. Na contagem, também devemos considerar suas cópias “viradas de cabeça para baixo”. Como existem 32 triângulos do tipo A, 18 do tipo B, 8 do tipo C e 2 do tipo D, o total de triângulos é 32+18+8+2 = **60**.