SEGUNDA LISTA DE TREINAMENTO NÍVEL II

2º FASE

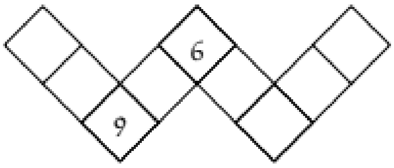
(SOLUÇÕES)

OMOC

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

QUESTÃO 1:

Em cada uma das casas do W da figura abaixo, escrevemos um número inteiro de 1 a 9 de modo que a soma dos três números de cada uma das quatro linhas seja a mesma.

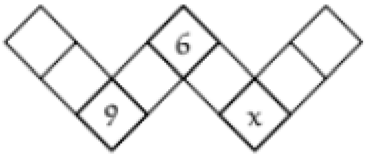


Já estão escritos o 6 e o 9. Como devem ser posicionados os outros números? Justifique.

Dica: A soma dos 9 primeiros números inteiros é 45.

SOLUÇÃO:

Seja S a soma dos três n´meros de cada linha e seja X o número mostrado na figura,



Como o 9, o 6 e o x estão em duas linhas, a soma de todas as somas das linhas é

$$(1 + 2 + \cdots + 9) + (9 + 6 + x) = 45 + (15 + x) = 60 + x$$

Que também é igual a. Assim,

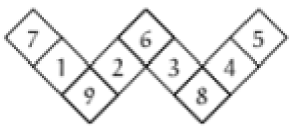
$$45 = 60 + x \Rightarrow S = 15 + \frac{x}{4}$$

Como a soma S é um número inteiro, x deve ser divisível por 4 e como x é um algarismo, temos que $x = 4 \; ou \; x = 8$, os quais correspondem a valores de S iguais a 16 ou 17, respectivamente. Se x = 4, o número que falta na linha que contém o 6 deve ser,

$$16 - 6 - 4 = 6$$

O que não é possível, pois não podemos repetir números.

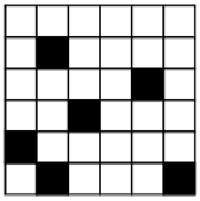
Logo, a única possibilidade é x = 8 e a soma dos elementos de cada linha é 17. Agora, basta combinar os demais números nas linhas.



QUESTÃO 2:

Considere um tabuleiro 6×6 com suas casas coloridas de branco ou preto. Duas casas são chamadas vizinhas se possuem um lado comum. A coloração do tabuleiro vai mudando a cada segundo, respeitando a seguinte condição: se num determinado segundo pelo menos duas casas vizinhas de uma determinada casa estão coloridas de preto, então no próximo segundo esta última casa será colorida de preto.

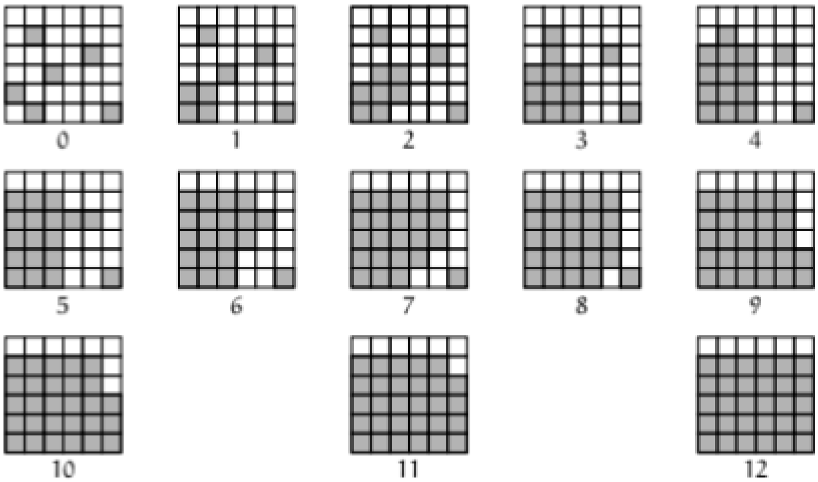
a) A figura abaixo mostra uma possível coloração inicial. Como ficará o tabuleiro após 12 segundos? E após 13 segundos?



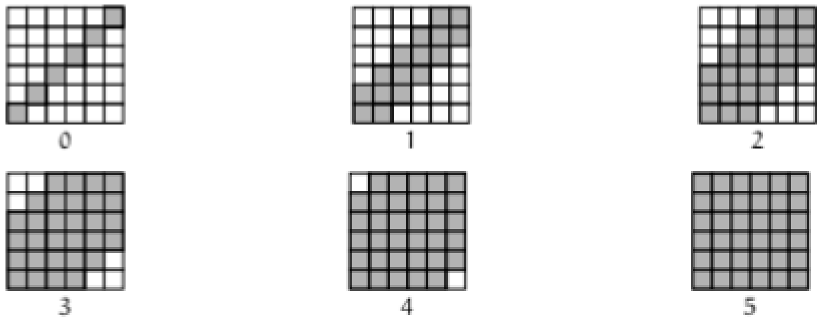
b) Exiba uma coloração inicial com 6 casas pretas de modo que, em algum momento, todas as casas fiquem pretas.

SOLUÇÕES:

a) Seguem as colorações do tabuleiro a cada segundo. Observe que a partir de 12 segundos todos os tabuleiros são iguais.



b) Colorimos inicialmente as casas de uma das diagonais. Após 5 segundo, todas as casas estarão pretas



QUESTÃO 3:

A estrada que liga dois vilarejos em uma montanha é formada somente por trechos de subida ou descida. Um ônibus sempre viaja 15 km/h em trechos de subida e 30 km/h em trechos de descida. Encontre a distância entre os vilarejos se o ônibus leva exatamente 4 horas para fazer a viagem completa de ida e volta.

SOLUÇÃO:

Observe que os trechos de subida no percurso de ida são exatamente os trechos de descida para a volta e vice-versa. Assim, em uma viagem de ida e volta a distância percorrida nas subidas é igual a distância percorrida nas descidas.

Chamaremos de d a distância entre os dois vilarejos. Como a distância total percorrida

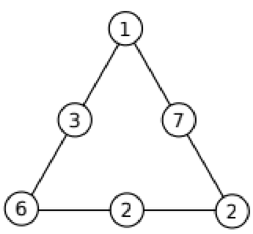
foi igual a $2d$, então o tempo gasto subindo foi $d/15$ horas e o tempo gasto descendo foi $d/30$ horas. Como o tempo total foi 4 horas, temos

$$\frac{d}{15} + \frac{d}{30} = 4$$

Resolvendo a equação encontramos $d = 40$, ou seja, a distância entre os vilarejos é igual a $40km$.

QUESTÃO 4:

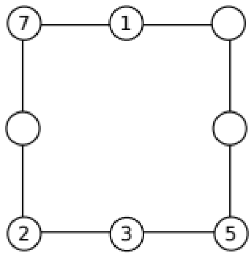
Amanda desenhou a seguinte figura:



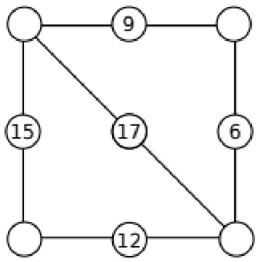
Observe que a soma dos números ao longo de qualquer lado do triângulo acima é sempre a mesma, pois, como podemos verificar

$$1 + 3 + 6 = 6 + 2 + 2 = 1 + 7 + 2$$

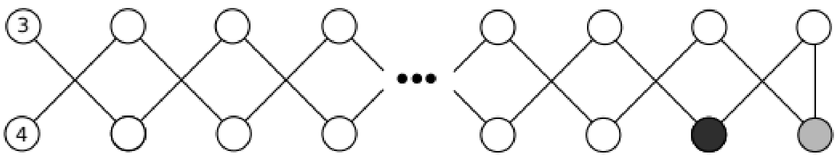
a) Complete os números que faltam nos círculos da figura abaixo de modo que as somas dos números ao longo de qualquer lado do quadrado sejam sempre as mesmas.



b) Encontre uma maneira de colocar os números nos círculos de maneira que as somas dos números ao longo de qualquer linha sejam sempre as mesmas. Há mais de uma solução?

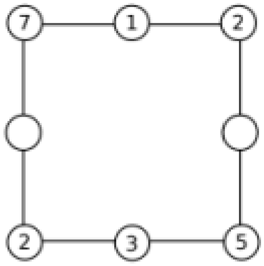


c) Na figura abaixo, que foi desenhada apenas parcialmente (por falta de espaço!), também vale que a soma ao longo de cada segmento é sempre a mesma. Entretanto, Amanda apagou todos os números exceto os dois números mostrados na figura (3 e 4). Sabe-se que há 40 círculos no desenho. É possível descobrir quais números estavam nos círculos pintados de cinza claro e cinza escuro?

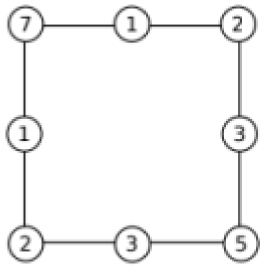


SOLUÇÃO:

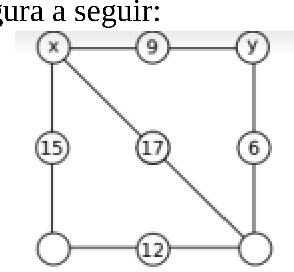
a) Na linha inferior a soma é $2 + 3 + 5 = 10$. Como as somas ao longo de qualquer lado são iguais, o número que falta no canto superior à direita do quadrado deve ser igual a 2, como na figura a seguir:



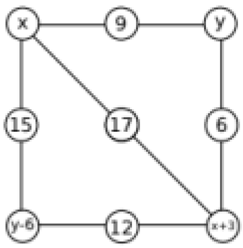
Faltam mais dois números a serem preenchidos. Novamente, como a soma deve ser 10 em qualquer lado, os números que faltam são 1 e 3, como na figura a seguir:



b) Vamos chamar de x e y os números a serem colocados nos cantos superiores do quadrado, como mostra a figura a seguir:



As somas devem ser constantes ao longo de qualquer lado ou diagonal desenhada. A soma ao longo do lado superior é $x + 9 + y$, logo todas as somas devem ser iguais a $x + 9 + y$. Observando as somas ao longo dos lados verticais, deduzimos que os cantos interiores devem ser iguais a $y - 6\ e\ x + 3$, como na figura a seguir:



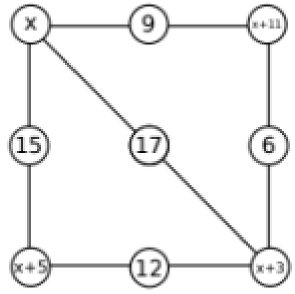
Falta verificar a soma ao longo da diagonal desenhada e do lado horizontal inferior. A soma ao longo do lado horizontal inferior é igual a

$$(y - 6) + 12 + (x + 3) = x + 9 + y$$

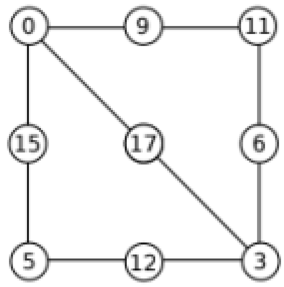
Verificando a soma desejada, e verificando a soma ao longo da diagonal desenhada obtemos

$$x + 17 + (x + 3) = x + 9 + y$$

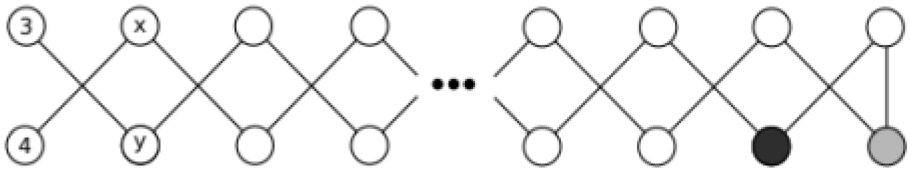
De onde concluímos que $y = x + 11$. Logo, qualquer solução será da forma



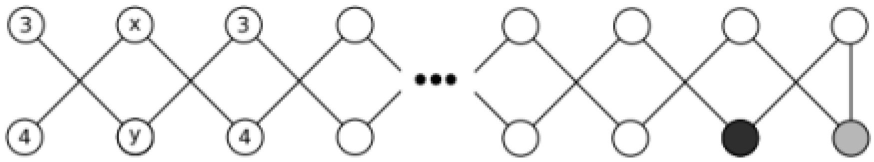
Como o valor de x ainda não foi fixado, podemos obter muitas soluções! Por exemplo, tomando $x = 0$, obtemos a solução:



c) Chamaremos de x e y os números vizinhos aos números 3 e 4, como na figura a seguir:



Como a soma ao longo de cada segmento é constante, os dois próximos números devem ser iguais a 3 e 4:



Como há 40 círculos no desenho, há 20 círculos na linha de cima e 20 círculos na linha de baixo. Continuando o processo acima, vamos obter:
Observe o x no canto superior mais à direita. Este x está ligado ao 4 e ao y. Como $x + 4 = x + y$, concluímos que $y = 4$. Logo, os números nos dois círculos cinza são iguais a 4.

QUESTÃO 5:

Em uma sala de aula há uma turma de dez alunos. Precisa-se escolher uma comissão de três alunos para representar esta turma, sendo a comissão composta por: um porta-voz, um diretor de artes e um assessor técnico. Nenhum aluno pode acumular cargos.

a) De quantas maneiras esta comissão pode ser formada?

b) Quantas comissões diferentes podem ser formadas com os alunos Leandro, Renato e Marcelo?

c) Considere agora comissões sem cargos específicos. Use os itens a) e b) anteriores para descobrir quantas comissões sem cargos específicos podem ser formadas.

SOLUÇÃO:

a) Para escolher o porta-voz, temos 10 possibilidades, já que são dez alunos. Escolhido o porta-voz, temos agora 9 possibilidades para escolher o aluno que será o diretor de artes. Finalmente, para escolher o assessor técnico, restam 8 possibilidades. Logo, temos

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Temos 720 maneiras diferentes para escolher a comissão pedida.

b) Podemos listar todas as comissões que têm os três alunos Marcelo, Leandro e Renato. Estas são:

Porta-voz	Diretor de Artes	Assessor Técnico
Marcelo	Renato	Leandro
Marcelo	Leandro	Renato
Renato	Leandro	Marcelo
Renato	Marcelo	Leandro
Leandro	Marcelo	Renato
Leandro	Renato	Marcelo

Logo, temos seis comissões possíveis. Outra maneira de obter o mesmo resultado seria: para escolher o porta-voz, 3 possibilidades dentre Marcelo, Renato e Leandro. Escolhido o porta-voz, restam duas possibilidades para escolher o diretor de artes. E escolhidos os dois cargos anteriores, só resta uma possibilidade para escolher o último cargo. Logo temos,

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Temos 6 maneiras diferentes para escolher uma comissão que tenha os alunos Marcelo, Leandro e Renato.

c) Agora não há mais cargos. Logo, as comissões listadas no item b) são todas iguais (representam a mesma comissão formada por Marcelo, Renato e Leandro). Para contar quantas são as comissões sem cargo, vamos agrupar as comissões com cargos (porta-voz, diretor de artes e assessor técnico) em grupos de seis comissões que tenham os mesmos três alunos. Como são 720 comissões com cargo, e são grupos de 6 com as mesmas pessoas, obtemos

$$\frac{720}{6} = 120$$

Temos 120 maneiras diferentes de compor uma comissão sem cargos.

QUESTÃO 6:

Cinco piratas encontraram um cofre do tesouro cheio de moedas de ouro e as dividiram entre si. Sabe-se que:

- O que o primeiro pirata recebeu é equivalente à metade do que receberam os outros quatro em conjunto.
- O que o segundo pirata recebeu é equivalente à terça parte do que receberam os outros quatro em conjunto.
- O que o terceiro pirata recebeu e equivalente à quarta parte do que receberam os outros quatro piratas.
- O que o quarto pirata recebeu é equivalente à quinta parte do que receberam os outros quatro em conjunto.

Se o quinto pirata recebeu 90 moedas, diga quantas moedas tinha o cofre antes da divisão.

SOLUÇÃO:

Sejam a, b, c, d, e as quantidades de moedas recebidas pelos cinco piratas. O número total de moedas é $S = a + b + c + d + e$. O primeiro pirata recebeu metade do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é,

$$a = \frac{b+c+d+e}{2} = \frac{S-a}{2}$$

Então $a = \frac{S}{3}$. O segundo pirata recebeu a terça parte do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é,

$$b = \frac{a+c+d+e}{3} = \frac{S-b}{3}$$

Portanto, $b = \frac{S}{4}$. O terceiro pirata recebeu a quarta parte do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é,

$$c = \frac{a+b+d+e}{4} = \frac{S-c}{4}$$

Então $c = \frac{S}{5}$. O quarto pirata recebeu a quinta parte do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é,

$$d = \frac{a+b+c+e}{5} = \frac{S-d}{5}$$

Daí, $c = \frac{S}{6}$. Assim, o último pirata recebeu

$$90 = e = S - a - b - d = S = \frac{S}{3} - \frac{S}{4} - \frac{S}{5} - \frac{S}{6} = \frac{S}{20}$$

Portanto, o cofre tinha $S = 1800$ moedas antes da divisão.

QUESTÃO 7:

Um grupo de rapazes e moças saiu para comer pizza em dias consecutivos. No restaurante em que foram, as pizzas são cortadas em doze pedaços iguais. Maria observou que no primeiro dia cada rapaz comeu 7 pedaços, e cada moça 3 pedaços. Curiosamente, em ambos os dias eles pediram quadro pizzas que foram totalmente consumidas e depois pediram mais uma, da qual sobraram alguns pedaços (ou seja, foi consumido pelo menos um pedaço e sobrou pelo menos um pedaço). Quantos rapazes e moças foram à pizzaria?

SOLUÇÃO:

Sejam x e y o número de rapazes e moças, respectivamente. Sabemos que o número total de pedaços consumidos foi no mínimo 49 (4 pizzas e um pedaço da última pizza) e no máximo 59 (4 pizzas mais 11 pedaços, lembre-se que sobrou pelo menos um pedaço da última pizza). Por outro lado,

$$7x + 3y \leq 59$$

$$6x + 2y \geq 49$$

Multiplicando a última equação por -1, temos que trocar a desigualdade, ficando com

$$7x + 3y \leq 59$$

$$-6x - 2y \leq -49$$

E somando as duas desigualdades chegamos a

$$x + y \leq 10$$

Substituindo na segunda desigualdade, ficamos com

$$4x + 10 + 10 \geq 4x + (x + y) + (x + y) = 6x + 2y \geq 49$$

Logo, $4x \geq 29$, e portanto $x \geq 8$. Por outro lado, da primeira equação temos que

$$7x \leq 7x + 3y \leq 59$$

Daí, $7x \leq 59$, que implica $x \leq 8$. Portanto, $x = 8$ e, substituindo, ficamos com

$$3y \leq 3 \; e \; 2y \geq 1$$

Isso nos dá, $y = 1$. Portanto, foram 8 rapazes e 1 moça à pizzaria.