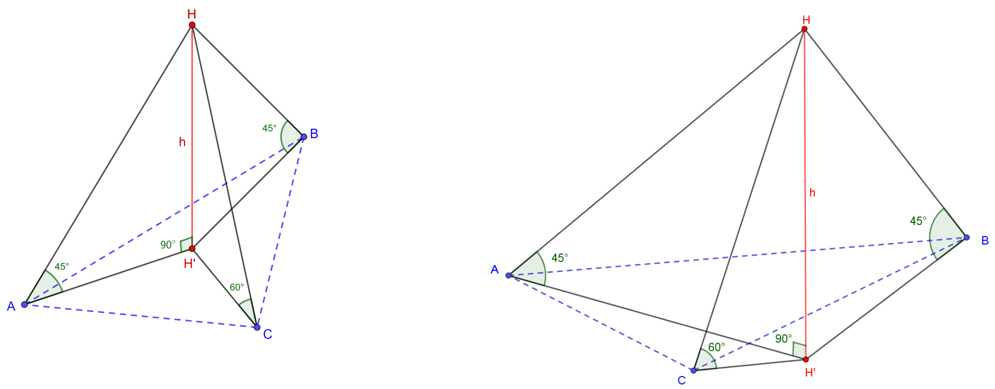
V OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE
SEGUNDA FASE
NÍVEL III - ENSINO MÉDIO - 2022

GABARITO

Questão 1: Um balão foi visto simultaneamente de três estações A, B e C sob ângulos de elevação 45^o, 45^o e 60^o, respectivamente. Sabendo que A está a 3 km a oeste de C e que B está a 4 km ao norte de C, determine a altura do balão.

Solução Seja H a posição do balão, H' a sombra do balão no solo e $HH' = h$ a altura do balão em relação ao chão. Temos dois casos possíveis em relação a posição do balão:



1a) H' é interno ao triântulo ABC   1b) H' é externo ao triântulo ABC

Figura 1: Posições relativas do balão

1^o *Caso*: O ponto H' está no exterior do triângulo ABC. Figura 1b).

Observe os triângulos $AH'H$ e $BH'H$.

Como $A\hat{H}'H = 90^0$ e $H'\hat{A}H = 45^0$ temos que $A\hat{H}H' = 45^0$. Isso implica que o triângulo $AH'H$ é isósceles de base AH e assim, $AH' = HH' = h$.

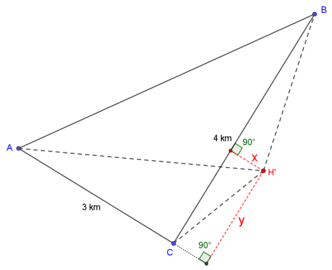
Da mesma forma, como $B\hat{H}'H = 90^0$ e $H'\hat{B}H = 45^0$ temos que $B\hat{H}H' = 45^0$. Isso implica que o triângulo $BH'H$ é isósceles de base BH e assim, $BH' = HH' = h$.

Por outro lado, tag $\quad 60^0 = \frac{h}{CH'} \Rightarrow CH' = \frac{\sqrt{3}}{3}h$.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\sin 45^0 &= \frac{HH'}{AH} \Rightarrow AH = \frac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}h \\
\sin 45^0 &= \frac{HH'}{BH} \Rightarrow BH = \frac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}h \\
\sin 60^0 &= \frac{HH'}{CH} \Rightarrow CH = \frac{2\sqrt{3}}{3}h
\end{aligned}
$$

Agora, considere os triângulos $BH'C$ e $AH'C$, conforme figura abaixo:



Onde y é a altura de ACH' em relação à AC.
Onde x é a altura de CCH' em relação à BC.
Assim, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (4-y)^2 = (BH')^2 = h^2 \quad (1) \\
y^2 + (3+x)^2 = (AH')^2 = h^2 \quad (2) \\
x^2 + y^2 = (CH')^2 = \frac{h^2}{3} \quad (3)
\end{aligned}
$$

Fazendo (1) menos (2) temos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 16 - 8y + y^2 - y^2 - 9 - 6x - x^2 = h^2 - h^2 \\
\Rightarrow -6x - 8y + 7 = 0 \\
\Rightarrow y = \frac{7-6x}{8} \quad (4)
\end{aligned}
$$

Fazendo (2) menos $3 \cdot (3)$ temos:

$$
\begin{aligned}
y^2 + 9 + 6x + x^2 - 3x^2 - 3y^2 = h^2 - h^2 \\
\Rightarrow -2x^2 - 2y^2 + 6x + 9 = 0 \\
\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 9 = 0 \quad (5)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4) em (5), obtemos uma equação de segundo grau em x:

$$2\left(x^2+\left(\frac{7-6x}{8}\right)^2\right)-6x-9=0$$

Fazendo as contas para encontrar as raízes obtemos:

$x_1 = 3,452$ e $x_2 = -0,692$ $\quad y_1(x_1) = 1,714$ e $y_2(x_2) = -1,394$

Descartamos as respostas negativas por se tratar de medida.

Assim, $(CH')^2 = 3,452^2 + 1,714^2 \Rightarrow CH' \approx 3,854102$.

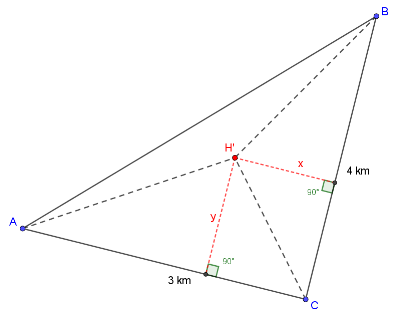
Portanto, $h = \frac{3}{\sqrt{3}CH'} \approx 6,676$.

2^o *Caso*: O ponto H' está no interior do triângulo ABC. Figura 1a).

Com raciocínio análogo ao 1^o Caso, temos:

$$BH' = HH' = AH' = h, \quad CH' = \frac{\sqrt{3}}{3}h, \quad AH = \sqrt{2}h, \quad BH = \sqrt{2}h, \quad CH = \frac{2\sqrt{3}}{3}h.$$

Agora, considere os triângulos $BH'C$ e $AH'C$, conforme figura abaixo:



Onde y é a altura de ACH' em relação à AC.

Onde x é a altura de CCH' em relação à BC.

Assim, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$x^2 + (4-y)^2 = (BH')^2 = h^2 \quad (1)$$
$$y^2 + (3-x)^2 = (AH')^2 = h^2 \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 = (CH')^2 = \frac{h^2}{3} \quad (3)$$

Fazendo (1) menos (2) temos:

$$x^2 + 16 - 8y + y^2 - y^2 - 9 + 6x - x^2 = h^2 - h^2$$
$$\Rightarrow 6x - 8y + 7 = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{-7-6x}{-8} = \frac{6x+7}{8} \quad (4)$$

Fazendo (2) menos $3 \cdot (3)$ temos:

$$
\begin{aligned}
y^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x^2 - 3y^2 &= h^2 - 3\frac{h^2}{3} \\
\Rightarrow -2x^2 - 2y^2 + 6x - 9 &= 0 \\
\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x + 9 &= 0 \quad (5)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4) em (5), obtemos uma equação de segundo grau em x:

$$2\left(x^2 + \left(\frac{7+6x}{8}\right)^2\right) - 6x + 9 = 0$$

Fazendo as contas para encontrar as raízes obtemos:
$x_1 = 0,692$ e $x_2 = -3,452$ $\quad y_1(x_1) = 1,394$ e $y_2(x_2) = -1,714$.
Descartamos as respostas negativas por se tratar de medida.
Assim, $(CH')^2 = 0,692^2 + 1,394^2 \Rightarrow CH' \approx 1,55631$.
Portanto, $h = \frac{3}{\sqrt{3}CH'} \approx 2,696$.

Questão 2: Dois ciclistas andam em linha reta, cada um a 5 km/h, em sentidos contrários. Quando eles estão a exatos 10 km um do outro, uma mosca, voando a 6 km/h, passa sobre a cabeça de um deles e vai rumo ao outro. Assim que ela encontra o outro motociclista, ela voa em direção à cabeça do primeiro, e fica indo, de um para o outro, até os dois motociclistas se encontrarem.

a) Qual a distância total que a mosca percorre nesse vaivém?

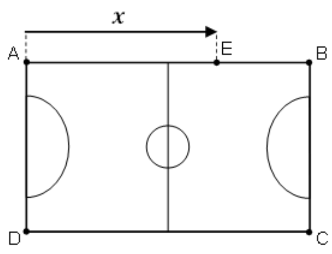
b) Supondo que a mosca tenha começado suas idas e vindas voando a partir da esquerda para a direita. Quantos km a mosca viajou só para a direita?

Solução

a) Como os ciclistas andam a uma velocidade constante de 5 km/h e estão à 10 km de distância, então, em 1 hora eles se encontrarão. Como a mosca voa a 6 km/h, então em 1 hora ela terá percorrido 6 km.

b) O total percorrido pela mosca é a soma da distância percorrida para a direita (D) com a distância percorrida para a esquerda (E). Logo, $D + E = 6$ km. A posição final da mosca é o quanto ela voou para a direita menos o que ela voou para a esquerda. Como a posição final da mosca será a mesma dos ciclistas, então, $D - E = 5$ km. Resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} D + E = 6 \\ D - E = 5 \end{cases}$ encontramos $D = 5,5$ km e $E = 0,5$ km.

Questão 3: Julia anda sobre o contorno de uma quadra retangular ABCD. Ela parte do ponto A, anda 40 metros até chegar em B, depois anda mais 20 metros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x metros, Julia está em um ponto E do contorno.



a) Calcule a área do triângulo ADE quando $x = 42$ metros.

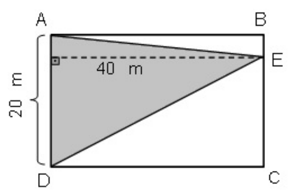
b) Qual é a maior área possível para um triângulo ADE?

c) Encontre a expressão da área do triângulo ADE em função do comprimento x.

d) Esboce o gráfico da função que representa a área do triângulo ADE.

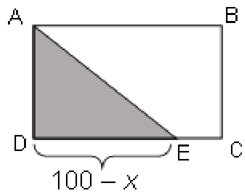
Solução

a) Quando $x = 42$ metros ela está no ponto E do segmento BC que dista 2 m do ponto B. Podemos considerar o segmento AD, com medida 20 m, a base do triângulo ADE e sua altura será a distância do ponto E à base AD, distância esta igual a 40 m. Portanto, a área do triângulo será $\frac{20 \cdot 40}{2} = 400 \quad m^2$.



b) Considerando sempre o segmento AD, com medida 20 m, a base do triângulo, sua área variará com a altura e será máxima quando a altura for máxima, ou seja, quando a altura for 40 m. O cálculo acima nos dá a área máxima igual a $400m^2$.

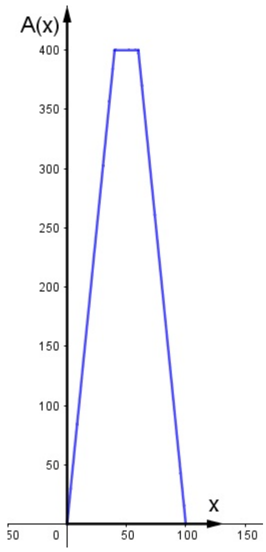
c) Quando $0 \leq x \leq 40$, o ponto E varia no lado AB e o valor da área do triângulo ADE será $\dfrac{20x}{2} = 10x \quad m^2$. Quando $40 \leq x \leq 60$, a área será constante e igual a $400m^2$, pois a base e a altura do triângulo serão sempre de 20 m e 40 m respectivamente. Para $60 \leq x \leq 100$, a expressão para a área será $\dfrac{20(100 - x)}{2} = 1000 - 10x \quad m^2$.



Assim, a expressão da área A em função de x, (A(x)), fica:

$$A(x) = \begin{cases} 10x, & \text{se} \quad 0 \le x \le 40; \\ 400, & \text{se} \quad 40 \le x \le 60; \\ 1000 - 10x, & \text{se} \quad 60 \le x \le 100. \end{cases}$$

d) O gráfico fica da seguinte forma:



Questão 4: Quatro times, A, B, C e D, disputam um torneio de vôlei em que cada time joga contra cada um dos outros uma única vez. Cada partida termina com a vitória de uma das equipes e cada um dos times têm a mesma probabilidade de ganhar. Ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.

a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?

b) Qual a probabilidade de que o time A fique, sozinho, em primeiro lugar?

c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

Solução

a) O número total de partidas disputadas no torneio é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Como 6 não é divisível por 4, o torneio não pode acabar com os quatro times tendo o mesmo número de vitórias.

b) Para que o time A termine isolado em primeiro lugar, ele deve ganhar todas as suas partidas, pois, se ele ganhar duas ou menos então os outros três times dividirão pelo menos quatro vitórias entre si, e assim algum deles deve ter pelo menos duas vitórias; nesse caso, o time A não seria o campeão isolado. Como a probabilidade de o time A ganhar um jogo contra qualquer dos outros times é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de ele ganhar suas três partidas é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

c) Como os times são A, B, C e D, suponhamos que o torneio termine com D isolado em último lugar. Então D perdeu todas suas partidas, pois,

- se D tivesse ganho suas três partidas, teria terminado o torneio em primeiro lugar (como vimos no item anterior);
- se D tivesse ganho duas partidas, os outros times dividiriam quatro vitórias entre si;
- se D tivesse ganho uma partida, os outros times dividiriam cinco vitórias entre si;

Nestes dois últimos casos, pelo menos um dos outros times teria ganho no máximo uma partida e assim D não teria ficado em último lugar isolado. Logo A, B e C dividem entre si as seis vitórias, ou seja, cada um deles ganhou duas vezes; uma contra D e uma contra um dos outros. Para as partidas entre A, B e C temos apenas duas possibilidades: A ganhou de B que ganhou de C ou A ganhou de C que ganhou de B, conforme mostram os dois quadros abaixo.

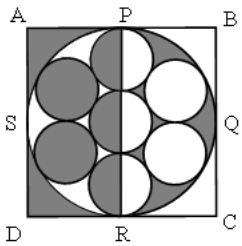
Em resumo, há apenas duas possibilidades para que A, B e C dividam a liderança, e neste caso D acaba o torneio em último lugar isolado. Como qualquer um dos times pode acabar em último lugar isolado, enquanto os outros dividem a liderança, segue que o número de possibilidades para que isto aconteça é $4 \cdot 2 = 8$. Por outro lado, o número total de possibilidades para os resultados das seis partidas é $2^6 = 64$. Logo a probabilidade de que três times dividam a liderança é $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

Partida	Vitória
A x B	A
B x C	B
C x A	C

Partida	Vitória
A x B	B
B x C	C
C x A	A

Figura 2: Possibilidades das partidas entre os times A, B e C

Questão 5: Na figura ABCD é um quadrado de lado 12cm. No interior da circunferência maior, há 7 circunferências menores de raio 2 cm, tangentes entre si. Os pontos P, Q, R e S são os pontos de tangência do quadrado ABCD com a circunferência, e também são os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA, respectivamente.



a) Qual a área da região sombreada?

b) Determine a área da circunferência de raio 6 cm e de uma circunferência de raio 2 cm.

c) Determine a área da região sombreada interior ao quadrado e exterior à circunferência de raio 6 cm.

d) Determine a área da região sombreada interior à circunferência de raio 6 cm e exterior às circunferências de raio 2 cm.

Solução

a) Como P e R são pontos médios dos lados do quadrado, então o segmento PR divide o quadrado em duas partes iguais. Da mesma forma, como a circunferência de raio 3 cm está inscrita no quadrado, então o segmento PR também divide a circunferência em duas partes iguais. Assim, temos que o segmento PR é o eixo de simetria da figura e a divide em partes simétricas. Com isso, temos que cada parte branca da figura apresenta uma parte cinza correspondente (de mesma área). Logo, a região cinza é a metade da área do quadrado, ou seja, $A_{cinza} = \dfrac{A_{quadrado}}{2}$.
Como o lado do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência, então o lado do quadrado mede 12 cm, e, consequentemente, sua área é $12 \cdot 12 = 144 \quad cm^2$. Assim, a área da região cinza é $144 \div 2 = 72 \quad cm^2$.

b) A área de uma circunferência é dada por $\pi \cdot r^2$. Assim, a área da circunferência de raio 6 cm é $\pi \cdot 6^2 = 36\pi \quad cm^2$ e a área da circunferência de raio 2 cm é $\pi \cdot 2^2 = 4\pi \quad cm^2$.

c) A região cinza interior ao quadrado e exterior à circunferência de raio 6 cm corresponde a metade da diferença entre a área do quadrado e a área da circunferência de raio 6 cm. Ou seja:

$$\frac{A_{quadrado} - A_{circulo}}{2} = \frac{144 - 36\pi}{2} = 72 - 18\pi = 18(4 - \pi) \quad cm^2$$

d) A área da região cinza interior à circunferência de raio 6 cm e exterior às circunferências de raio 2 cm corresponde à metade da diferença entre a área da circunferência de 6 cm e a área das 7 circunferências de raio 2 cm. Ou seja:

$$\frac{A_{raio6} - 7 \cdot A_{raio2}}{2} = \frac{36\pi - 7 \cdot 4\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi \quad cm^2$$