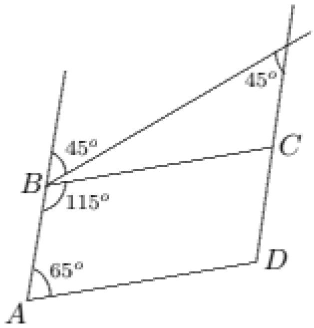
Treinamentos OMOC

Nível 2

Segunda fase

Baseado na OBMEP

1. O quadrilátero ABCD da figura é um paralelogramo?



Resolução:

Para que ABCD seja um paralelogramo, seus lados devem ser dois a dois paralelos, isto é: $AB//CD\ e\ AD//BC$. Como:

$$\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 180°$$

Então as retas AD e BC são paralelas. Além disso, temos dois ângulos alternos internos de 45◦ entre as retas AB e DC, segue-se que elas são paralelas. Logo ABCD é um paralelogramo.

2. Para comemorar seu aniversário, Ana vai preparar tortas de pera e tortas de maçã. No mercado, uma maçã pesa 300g e uma pera 200g. A sacola de Ana aguenta um peso máximo de 7k. Qual é o número máximo de frutas que ela pode comprar para poder fazer tortas das duas frutas?

Resolução:

Denotemos por m o número de maças e p o número de peras que Ana comprou, assim o peso que ela leva na sacola é $300m + 200p$ gramas. Como a sacola aguenta no máximo 7000 gramas, temos que

$300m + 200p \leq 7000$, que ́e equivalente a $3m + 2p \leq 70$.

Como as peras pesam menos, Ana tem que levar a máxima quantidade de peras, portanto, a mínima quantidade de maçãs. Assim, se ela levar 1 maçã, temos:

$$2p \leq 70 - 3 = 67 \Longrightarrow p \leq 33,5.$$

Logo, levando 1 maçã, ela pode levar 33 peras. Então, o número máximo de frutas é 34.

Na tabela abaixo vemos que Ana pode também levar 2 maçãs e 32 peras.

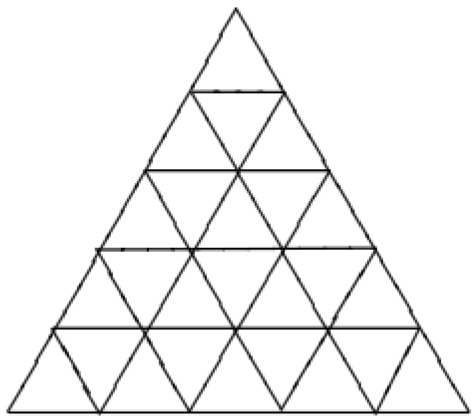
p	m	$300m + 200p$	$p + m$
34	0	6800	34
33	1	6900	34
32	2	7000	34
31	2	6800	33

3. Osvaldo comprou um queijo em forma de um triângulo equilátero. Ele quer dividir o queijo igualmente entre ele e seus quatro primos. Faça um desenho indicando como ele deve fazer essa divisão. Justifique.

Resolução:

Para dividir o queijo em 5 partes iguais, é suficiente dividi-lo em 5k partes iguais e dar k partes a cada um. Uma forma de fazer essa partição, é mostrada na figura, onde o queijo foi partido em 25 = 5 × 5

triângulos.



4. Cátia sai da escola todos os dias no mesmo horário e volta para casa de bicicleta. Quando ela pedala a 20km/h, ela chega em casa às 4:30 horas da tarde. Se ela pedalar a 10km/h, ela chega em casa às 5:15 horas da tarde. A qual velocidade ela deve pedalar para chegar em casa às 5:00 horas da tarde?

Resolução:

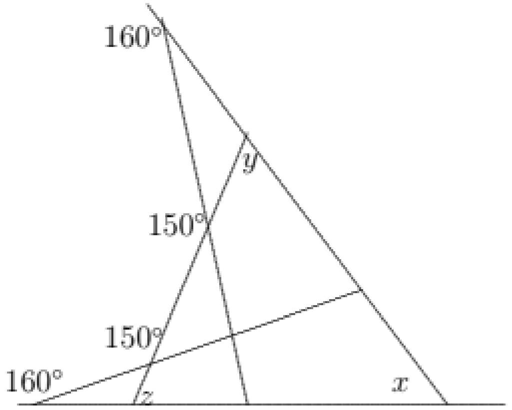
Seja t o tempo que ela gasta pedalando a 20km/h.

Pedalando a 10 km/h, ela faz o percurso no dobro do tempo que pedalando a 20km/h, isto é, 2t. No entanto, como ela demora 45 minutos a mais temos:

$$2t - t = 45 \implies t = 45min.$$

Logo, diariamente ela sai da escola às $4:30\ h - 45\ min = 3:15\ h$, e o percurso até em casa é de $45min \times 20km/h = \frac{3}{4} \times 20 = 15km$. Para percorrer 15km em $5:00\ h - 3:15\ h = 1:45\ h = \frac{5}{4h}$, ela deve manter uma velocidade de $\frac{15km}{\frac{5}{4}h} = 12km/h$

5. Dados os ângulos de $150°\ e\ 160°$, indicados na figura, calcule os valores dos ângulos $x, y\ e\ z$.



Resolução:

Observemos que os ângulos y, 150◦ e 160◦ são ângulos externos de um triângulo, logo $y + 150° + 160° = 360°$.

Assim $y = 50°$. Pela mesma razão concluímos que $z = 50°$. Como x, y e z são ângulos internos de um triângulo então $x + y + z = 180°$, portanto $x = 80°$.

6. Num armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará à mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

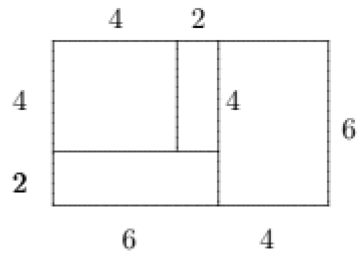
Resolução:

Podemos supor que o preço inicial de uma dúzia de ovos é R$ 1, 00, assim 10 maçãs também custam R$ 1, 00. Como o preço do ovo caiu 2%, então o novo valor de uma dúzia de ovos é R$ 0, 98. O preço das maçãs subiu 10%, logo o novo preço das 10 maçãs é R$ 1, 10. Assim antes gastava-se R$ 2, 00 na compra dos ovos e das maçãs e agora gasta-se $0,98 + 1,10 = 2,08$ reais. Logo, o aumento foi de R$ 0, 08, que corresponde a $\frac{0,08}{2} \times 100\% = 4\%$.

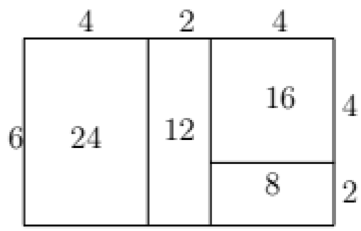
7. Luís desenhou um retângulo de 6cm por 10cm, e quer dividi-lo em quatro partes. Cada parte deve ter de área, respectivamente, $8cm^2, 12cm^2, 16cm^2, 24cm^2$. Desenhe como ele pode fazer essa divisão.

Resolução:

Como $24 = 4 \times 6$, então ele construiu o primeiro retângulo, tirando 4 cm do lado de 10 cm, sobrando um quadrado de lado 6 cm. Sendo $16 = 4 \times 4$, ele construiu um quadrado de lado 4 cm sobrando dois retângulos de áreas $(6 - 4) \times 4 = 8\,cm^2$ e $(6 - 4) \times 6 = 12\,cm^2$, como, por exemplo, a divisão mostrada na figura abaixo.



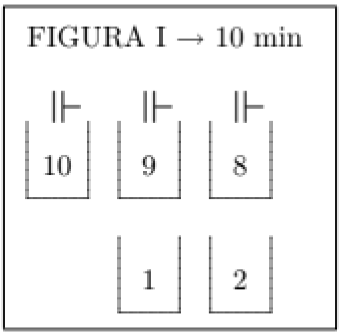
A seguinte configuração também é uma solução para o problema.

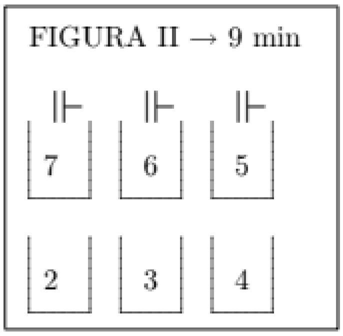


8. Sílvia vai a uma fonte que tem três torneiras, encher os seus dez garrafões. Um dos garrafões demora um minuto para encher, outros dois minutos, outros três minutos e assim por diante. Como Sílvia deverá distribuir os garrafões pelas torneiras de modo a gastar o menor tempo possível? Qual é esse tempo?

Solução 1:

Para simplificar, numeramos os garrafões de acordo com os respectivos tempos que gastam para ficar cheios. A ideia, é utilizar o "tempo que sobra" de um garrafão para encher outro garrafão, enchendo simultaneamente outros. As figuras ilustram a solução.





Na figura I as 3 torneiras gastam 10 minutos para encher os garrafões $10, 9, 8,$ 1 e 2. Na figura II as 3 torneiras gastam 9 minutos para encher os garrafões $7, 6, 5, 2, 3$ e 4. Logo, o tempo total gasto é de 19 minutos.

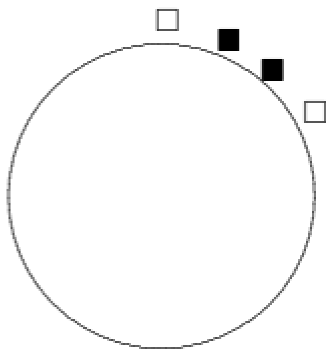
Solução 2:

Se tivéssemos uma torneira só, o tempo gasto para encher os 10 garrafões é $1 + 2 + \cdots + 9 + 10 = 55$ minutos. Como $55 = 18 \times 3 + 1$, se temos 3 torneiras devemos gastar pelo menos 19 minutos. A seguinte tabela mostra a forma de fazer o trabalho em 19 minutos.

Torneira 1	10	9		
Torneira 2	8	7	3	
Torneira 3	5	4	2	1

9. Uma mesa circular tem 60 cadeiras em sua volta. Existem N pessoas sentadas nessas cadeiras de tal modo que a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de alguém. Qual é o menor valor possível para N?

Se a próxima pessoa a se sentar vai ter que se sentar ao lado de uma cadeira ocupada, isso significa que existem no máximo 2 cadeiras desocupadas consecutivas. Veja na figura:



As cadeiras ocupadas estão representadas por quadradinhos brancos e as desocupadas por quadradinhos pretos. Podemos então pensar nas cadeiras em grupos de 3 e a terceira est́a ocupada. Logo, o menor valor de N é 60 ÷ 3 = 20.

10. Marta e Carmem ganharam, cada uma, muitos bombons. Elas misturaram os bombons e agora não sabem mais qual o número de bombons que cada uma ganhou. Vamos ajudá-las a descobrir os números sabendo que:

• juntas ganharam 200 bombons;

• cada número é múltiplo de 8;

• Marta se lembra que ganhou menos de 100 bombons, mas mais do que 4/5 do que ganhou Carmem.

Resolução:

Sejam x o número de bombons que Marta ganhou e y o que Carmem ganhou. Temos $x + y = 200$. Como $x < 100$ então $y \geq 100$. Por outro lado, $x > \frac{4}{5}y$ e $y \geq 100$, concluímos que $x > \frac{4}{5} \times 100 = 80$.

Logo, x é um inteiro compreendido entre 80 e 100 e múltiplo de 8, logo, só pode ser 88 ou 96. Vamos decidir:

• Se $x = 88$, então $y = 200 - 88 = 112$. Logo: $x > 4/5 \times 112 = 89,5$ o que não é possível.

• Se $x = 96$, então $y = 200 - 96 = 104$ e $x > \frac{4}{5} \times 104 = 83,2$, o que é possível.

Logo Marta ganhou 96 bombons e Carmem 104.