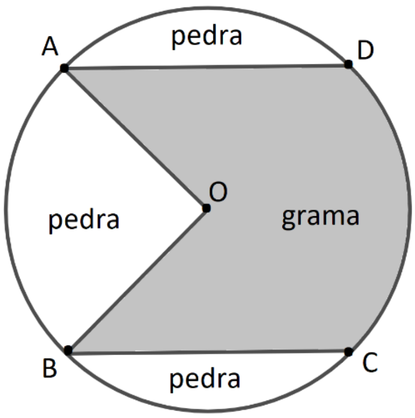
Gabarito IV OMOC

Nível 3

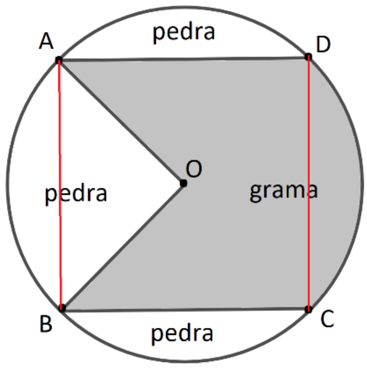
QUESTÃO 1:

Na praça central da cidade de Ilhazinha será construído um jardim de formato circular, coberto por pedras e grama. A figura ilustra o jardim com centro em O, de modo que, ao ligar os pontos A, B, C e D forma-se um quadrado com perímetro de 24 m.



Responda apresentando os cálculos e descrevendo todo o processo realizado e nos itens a) e b) substitua π por 3,14.

a) Qual a área que será coberta por grama?



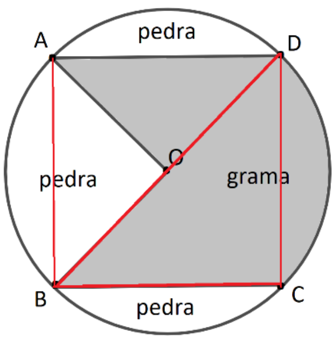
Solução:

Analisando o quadrado ACBD:

Sabemos que o quadrado possuí todos os lados iguais e que o perímetro é dado pela soma de seus lados, portanto, se o lado do quadro mede l tem-se que o perímetro é dado por $4{\cdot}l$. O enunciado informa que o perímetro do quadrado ABCD é 24 m, logo $4{\cdot}l = 24$, desse modo temos uma equação do 1° grau e resolvendo-a encontra-se a medida do lado l: $l = \frac{24}{4} = 6$, assim o lado do quadrado ABCD é de 6 m.

Relacionando os elementos do quadrado com os elementos do círculo:

De acordo com a figura, tem-se que os segmentos AO, BO, CO e DO são raios do círculo, cuja medida é a metade das diagonais AC e BD do quadrado, ou seja, as diagonais são diâmetros do círculo (lembre-se: o quadrado possui diagonais de mesma medida). Então, para descobrir a medida do raio do círculo é necessário, primeiramente, descobrir a medida das diagonais.



Ao traçar a diagonal BD observamos o triângulo retângulo BCD, assim para descobrir a medida de BD, sabendo que BC e DC medem 6m, utilizamos a relação do Teorema de Pitágoras:

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (DC)^2$$

$$(BD)^2 = 6^2 + 6^2$$

$$(BD)^2 = 36 + 36$$

$$(BD)^2 = 72$$

$$BD = \sqrt{72}$$

Como 72 não possui raiz quadrada inteira, decompomos o em fatores primos: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2$

$$BD = \sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2}$$

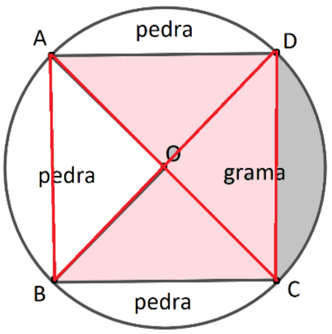
$$BD = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$BD = 6\sqrt{2}m$$

Como o raio do círculo é a metade de BD, tem-se que o raio mede $3\sqrt{2}m$.

Calculando a área:

Podemos calcular primeiro a área que fica dentro do quadrado, isto é, da figura AOBCD.



Os três triângulos AOD, DOC e COB que formam essa região, assim como o triângulo AOB são congruentes pelo caso de congruência LAL.

Assim, ao saber a área do quadrado e dividi-la por quatro saberemos a área de cada um destes triângulos:

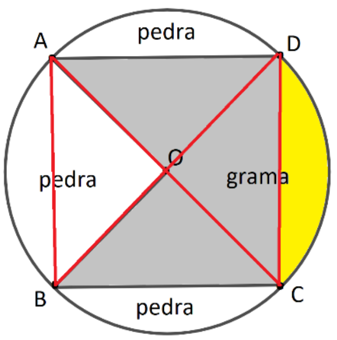
$$A_{quadrado} = 6^2 = 36\, m^2$$

$$A_{triângulo} = \frac{36}{4} = 9\, m^2$$

Desse modo, estes triângulos possuem área de 9m², como a região AOBCD é formada por três triângulos, a sua área é dada por:

$$A_{AOBCD} = 3 \cdot 9 = 27\, m^2$$

Agora calculamos a área da região restante, representada em amarelo:



O círculo é dividido em quatro regiões congruentes, ou melhor, quatro setores circulares, assim descobrimos a área de cada uma destas regiões:

$$A_{círculo} = \left(\pi \cdot r^2\right)$$

$$\left(3,14 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2\right) = (3,14 \cdot (9 \cdot 2)) = 56,52\ m^2$$

$$A_{setor} = \frac{56,52}{4} = 14,13\ m^2$$

A área da região desejada pode ser determinada subtraindo a área do triângulo da área do setor:

$$A_{região} = 14,13 - 9 = 5,13\ m^2$$

Portanto, a área a ser coberta por grama é dada por:

$$A_{grama} = 27 + 5,13 = 32,13 m^2$$

b) Qual a área que será coberta por pedra?

Solução:

Basta fazer a seguinte soma:

$$A_{pedras} = 3 \cdot A_{região} + A_{triângulo} = 3 * 5,13 + 9 = 24,39\ m^2$$

c) Considere que a grama custa R$ 7,00 o metro quadrado e a pedra custa R$ 5,50 o metro quadrado. Quanto será gasto para cobrir este jardim com grama e pedras?

Solução:

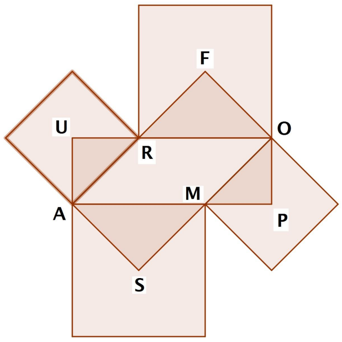
Gasto com grama: $32,13 \cdot 7 = 224,91\ reais$

Gasto com pedras: $24,39 \cdot 5,50 = 134,14\ reais$

Gasto total: $224,91 + 134,14 = 359,05\ reais$

QUESTÃO 2:

Na imagem abaixo, AMOR é um paralelogramo sendo que os seus segmentos medem 4 cm e 6 cm e sua área é de $20cm^2$. Além disso, os pontos U, F, P e S são os centros dos quadrados construídos a partir dos lados do paralelogramo. Com estas informações responda as perguntas localizadas após a figura.



a) Prove que os triângulos RFM e ASM são congruentes.

b) Calcule a área do polígono $AURFOPMS$.

Resolução:

a) $OC \equiv O'M$ (Por hipótese), por consequência os dois quadrados construídos a partir destes dois segmentos, respectivamente, são congruentes. Pelas propriedades do quadrado suas diagonais se bisseccionam e são congruentes, assim $\overline{SO} \equiv \overline{SC}$, pelo mesmo motivo $\overline{O'F} \equiv \overline{FM}$e como os dois quadrados mencionados são congruentes temos que $\overline{SO} \equiv \overline{SC} \equiv \overline{O'F} \equiv \overline{FM}$

Portanto, pelo caso LLL $\Delta O'FM \equiv \Delta OSC$

b) a área do polígono $OUO'FMS'CS \equiv \text{área do paralelogramo } O'MOC + \text{ a área dos quatro triângulos}$

A área de cada triângulo é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado correspondente. Dois dos quadrados possuem área igual $(4\ cm)^2 = 16\ cm^2$ então dois triângulos possuem área igual a $\frac{16 cm^2}{4} = 4\ cm^2$. Os outros dois quadrados possuem área igual a $6\ cm^2 = 36\ cm^2$, assim dois triângulos possuem área igual a $\frac{(36\ cm^2)}{4} = 9cm^2$.

$$\text{área}\left(OUO'FMS'CS\right) = \text{área}\left(O'MOC\right) + \text{ área dos quatro triângulos}$$

$$\text{área}\left(OUO'FMS'CS\right) = 20cm^2 + 4cm^2 + 4cm^2 + 9cm^2 + 9cm^2 = 46cm^2$$

QUESTÃO 3:

João possui uma calculadora, que dentre todas as funcionalidades oferecidas, apresenta uma tecla especial com a seguinte mecânica de funcionamento: se um número *y*, qualquer, diferente de 2 está no visor, e ele aciona a tecla especial, o resultado obtido será o número $\frac{2\times y}{y-2}$ .Por exemplo, caso o número 1 esteja no visor, ao apertar a tecla especial, o resultado dado será -2, pois $\frac{2x1}{1-2} = \frac{2}{-1} - 2$. A partir destas informações responda:

a) Se o número 3 está no visor, qual será o número obtido se João apertar a tecla especial?

b) Explique, detalhadamente, por que ao acionar a tecla especial duas vezes em sequência, João sempre obtém o número que era apresentado inicialmente pelo visor.

c) Qual é o número que nunca será dado como resultado ao apertar a tecla especial?

d) Para quais valores no visor, ao se apertar a tecla especial apenas uma única vez, obtém-se o mesmo valor?

Solução:

a) Basta substituir *y* por 3 e teremos $\frac{2x3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$

b) Como maneira de explicar o resultado obtido junto ao visor da calculadora caso a tecla especial seja apertada duas vezes seguidas, podemos fazer o seguinte raciocínio:

Seja $y\ o\ n$ número genérico apresentado pelo visor inicialmente. Ao apertar a tecla especial pela primeira vez obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{2y}{y-2} = t$$

Assim, ao apertar-se a tecla especial pela segunda vez, obter-se-á:

$$\frac{2t}{t-2}$$

A partir disso, substitui-se *t* por $\frac{2y}{y-2}$. Logo o resultado observado no será:

$$\frac{2\left(\frac{2y}{y-2}\right)}{\left(\frac{2y}{y-2}\right)-2} = \frac{\frac{4y}{y-2}}{\frac{2y-2y+4}{y-2}} = \frac{\frac{4y}{y-2}}{\frac{4}{y-2}} = \frac{4y}{y-2} \cdot \frac{y-2}{4} = \frac{4y}{4} = y$$

Dessa forma, fica verificado, se a tecla especial for acionada duas vezes em sequência, será obtido o número que inicialmente era mostrado pelo visor.

c) De acordo com o enunciado do problema, qualquer número que defira de 2 pode ser obtido ao se acionar a tecla especial. E é justamente o número 2 que nunca será obtido no visor, uma vez que através da respectiva igualdade encontra-se:

$$\frac{2y}{y-2} = 2 \longrightarrow 2y - 4 \longrightarrow 0 = 4$$

O que é um absurdo. Logo o número que não pode ser obtido utilizando-se a tecla especial é o 2.

d) Ao se igualar y a $\frac{2y}{y-2}$, temos:

$$\frac{2y}{y-2} = y \longrightarrow y^2 - 2y = 2y \longrightarrow y^2 - 4y = 0 \longrightarrow y(y - 4) = 0$$

O que implica que:

$$y = 0$$

Ou

$$y - 4 = 0 \rightarrow y = 4.$$

Logo, para os valores 0 e 4, serão obtidos os mesmos valores ao se apertar a tecla especial.

QUESTÃO 4:

Em uma pequena cidade interiorana do Brasil existem apenas duas empresas de táxi, a Rota Táxi e a TaxPress, cujos preços ao cliente estão catalogados na tabela abaixo:

Rota Táxi		TaxPress	
Taxa Fixa	Adicional Por Quilômetro Rodado	Taxa Fixa	Adicional por Quilômetro Rodado
R$2,00	R$0,75	R$3,00	R$0,50

Os amigos Bruno, Elen e Marquinhos residem e trabalham nesta cidade, e sempre utilizam o serviço de táxi de casa para o trabalho. Nesse contexto, para economizar dinheiro, Marquinhos sempre utiliza os táxis da Taxpress e, pelo mesmo motivo, Bruno só usa os da Rota Táxi. Por outro lado, Elen usa o serviço de ambas as empresas, uma vez que, ela gasta o mesmo preço.

a) Quanto Elen paga para ir de táxi de casa para o trabalho?

b) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a maior distância entre sua casa e seu trabalho?

Solução:

Como consequência direta do enunciado do problema, podemos atrelar os valores monetários praticados pelas empresas de táxi à duas funções que associam o preço cobrado em reais ao número *x* de quilômetros percorridos:

• Função que caracteriza o preço tabelado pela empresa Rota Taxi:

o $P(x)=2 + \frac{3}{4}x$

• Função que caracteriza o preço tabelado pela empresa TaxPress:

o $Q(x)=3 + \frac{1}{2}x$

A partir disso, vamos descrever a solução dos itens enunciados:

a)Sabemos que para percorrer o percurso de casa para o trabalho utilizando o serviço de táxi, Elen gasta o mesmo valor com ambas as empresas.

Neste momento, é de suma importância, perceber que para calcular este valor pago por Elen, é necessário primeiramente descobrir a quantidade de quilômetros do qual ela se desloca.

E é justamente pelo fato deste gasto apresentar-se como equivalente para ambas as empresas, que para encontrar esta quilometragem, basta igualar a função *P* a função *Q*. Isto é:

$$2 + \frac{3}{4}x = 3 + \frac{1}{2}x$$

Assim:

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x = 3 - 2$$

$$\frac{3x-2x}{4} = 1$$

$$x = 4$$

Logo, a distância percorrida por Elen, utilizando o táxi, de sua casa para o trabalho é de 4 km.

Agora, aplicando este valor encontrado para a distância em qualquer uma das duas funções (optaremos pela função *Q*) temos que:

$$Q(x) = 3 + \frac{1}{2}x$$

$$Q(4) = 3 + \frac{1}{2}.4$$

$$Q(4) = 3 + 2$$

$$Q(4) = 5$$

Desse modo, o valor pago por Elen, para ir de táxi de casa para o trabalho, é de R$5,00.

b) No item anterior vimos que Elen percorre 4 km de táxi da sua casa para o táxi.

Assim, o que nos resta é verificar a distância percorrida por Bruno e Marquinhos. Para isso temos que considerar duas informações evidenciadas pelo enunciado da questão:

- Para economizar dinheiro Marquinhos sempre utiliza os táxis da Taxpress. O que significa que o valor gasto por Marquinhos usando a Taxpress é menor do que seria gasto fazendo o uso da Rota Táxi.
- Para economizar dinheiro Bruno sempre utiliza os táxis da Rota Taxi. O que remete a ideia de que o valor gasto por Bruno usando a Rota Taxi é menor do que seria gasto utilizando a Taxpress.

Deste raciocínio podemos matematizar duas inequações:

- Para a distância percorrida por Marquinhos:

$$Q(x) < P(x)$$

$$3 + \frac{1}{2}x < 2 + \frac{3}{4}x$$

E, portanto:

$$3 - 2 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x$$

$$1 < \frac{3x-2x}{4}$$

$$4 < x$$

$$x > 4$$

Assim, a distância percorrida por Marquinhos é superior a 4 km.

- De maneira análoga podemos verificar a distância percorrida por Bruno:

$$P(x) < Q(x)$$

$$2 + \frac{3}{4}x < 3 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x < 3 - 2$$

$$\frac{3x-2x}{4} < 1$$

$$x < 4$$

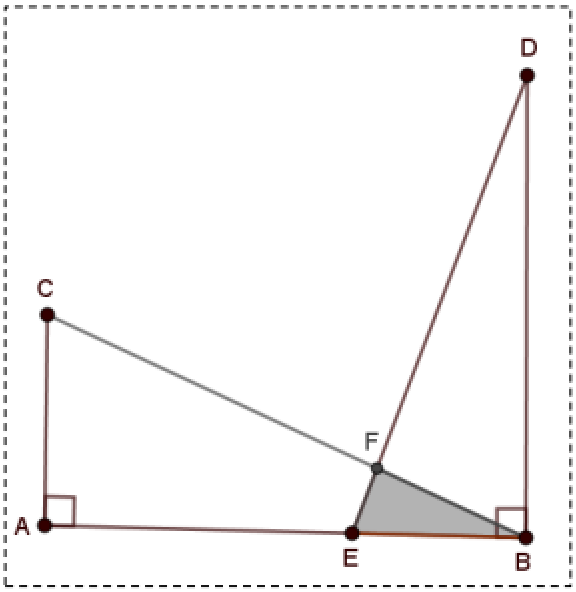
Logo, a distância percorrida por Bruno é inferior a 4 km.

Dessa forma, ao recapitular os cálculos realizados, as relações do número x de quilômetros percorridos por Elen, Marquinhos e Bruno ao utilizar o serviço de táxi, de casa para o trabalho, são, respectivamente: $x = 4, x > 4 \, e \, x < 4$.

O que significa que dos três amigos citados, Marquinhos é o que percorre de táxi, a maior distância entre sua casa e seu trabalho.

QUESTÃO 5:

Na figura abaixo, os triângulos ABC e BDE são congruentes e os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{B}E$ são retos:



a) Ache a razão entre o triângulo BDF e a área do quadrilátero $AEFC$.

b) Determine a medida do ângulo $B\hat{F}E$.

c) Sabendo que $AB = 15 \, e \, AC = 8$, determine a área do triângulo EBF.

Solução:

a) Pelo fato de que os triângulos ABC são congruentes, temos que:

$$área \ de \ ABC = área \ de \ BDE$$

Além disso, analisando-se a figura apresentada, percebe-se que:

- $área \ de \ AEFC = área \ de \ ABC - área \ de \ BFE$;
- $área \ de \ BDF = área \ de \ BDE - área \ de \ BEF$.

Logo:

$$área \ de \ AEFC = área \ de \ ABC - área \ de \ BFE$$

$$área\ de\ AEFC\ =\ área\ de\ BDE\ -\ área\ de\ BFE$$

$$área\ de\ AEFC\ =\ área\ de\ BDF$$

$$área\ de\ AEFC \cdot 1\ =\ área\ de\ BDF$$

$$=área\ de\ BDF$$

$$área\ de\ AEFC\ =\ 1$$

Logo, a razão entre o triângulo BDF e a área do quadrilátero $AEFC$ é 1.

b) Como os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos $D\hat{E}B\ =\ B\hat{C}A$, donde:

$$D\hat{E}B\ +\ A\hat{B}C\ =\ B\hat{C}A\ +\ A\hat{B}C\ =\ 90°$$

E assim:

$$B\hat{F}E\ =\ 180°\ -\ (D\hat{E}B\ +\ A\hat{B}C)\ =\ 180°\ -\ 90°\ =\ 90°.$$

Logo o ângulo $B\hat{F}E$ tem uma medida de 90°.

c) Pelo fato de que os triângulos ABC e BDE são congruentes, temos que $EB\ =\ AC\ =\ 8$. Além disso, os triângulos ABC e FBE são semelhantes, uma vez que, são retângulos e têm em comum o ângulo em B, logo:

$$\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{AB}$$

$$\frac{EF}{8} = \frac{BF}{15}$$

$$EF = \frac{8.BF}{15}$$

Como BEF é um triângulo retângulo, sua área é dada por $\frac{EF \cdot BF}{2}$, e como $\frac{8.BF}{15}$, essa área será:

$$\frac{\left(\frac{8.BF}{15}\right).BF}{2} = \frac{\frac{8.BF^2}{15}}{2} = \frac{8.BF^2}{15}.\frac{1}{2} = \frac{8.BF^2}{30}$$

Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$EB^2 = EF^2 + BF^2$$

Donde:

$$8^2 = \left(\frac{8.BF}{15}\right)^2 + BF^2$$

$$\frac{64.BF^2}{225} + BF^2 = 64$$

$$\frac{64.BF^2+225.BF^2}{225} = 64$$

$$289.BF^2 = 14400$$

$$BF^2 = \frac{14400}{289}$$

Logo, a área do triângulo *BEF* será dada por:

$$\frac{\left(8.BF^2\right)}{30} = \frac{8}{30}.\frac{14400}{289} = \frac{8}{1}.\frac{480}{289} = \frac{3840}{289}$$

Dessa forma, a área do triângulo *BEF* é de $\frac{3840}{289}cm^2$