V OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE 2022 - UFFS - NÍVEL II - 8º E 9º ANOS

Nome Completo:

Ano em que Estuda:	Escola:

____

ASSINATURA DO ALUNO

Instruções

- Preencha os dados no cabeçalho desta folha, e lembre-se de assinar no local indicado;
- A duração da prova é de 3 horas;
- O participante deve permanecer obrigatoriamente no local de realização da prova por, no mínimo, 30 minutos após o seu início;
- A prova contém 5 questões descritivas;
- Cada questão descritiva vale 20 pontos;
- A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível, com caneta preta ou azul;
- Você pode usar o verso da folha da questão para escrever a resposta.
- Os espaços em branco na prova podem ser usados para rascunho;
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar;
- Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões;
- Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.

Não é permitido:

a. calculadoras ou qualquer fonte de consulta;

b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;

c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora, máquinas fotográficas etc.).

d. O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Ao final da prova, entregue ao aplicador todas as 6 folhas recebidas.

QUESTÃO 1:

Três tartarugas estavam juntas e começaram a caminhar em linha reta em direção a um lago distante. A primeira tartaruga percorre 30 metros por dia e demorou 16 dias para chegar ao lago. A segunda tartaruga só conseguiu percorrer 20 metros por dia e, portanto, chegou ao lago alguns dias depois da primeira. A terceira tartaruga por sua vez demorou 32 dias para chegar.

a) Quando a primeira tartaruga chegou ao lago, o número de dias que ela teve que esperar para a segunda tartaruga chegar foi de?

SOLUÇÃO:

Como a primeira tartaruga andou 30 metros por dia, em 16 dias terá percorrido:

16 . 30 = 480 metros

Para descobrir quanto tempo a segunda tartaruga levará para percorrer os 480 metros, basta dividir pelos 20 metros percorridos por dia, assim temos:

480 : 20 = 24 dias

Assim, o tempo de espera da primeira tartaruga será:

24 - 16 = 8

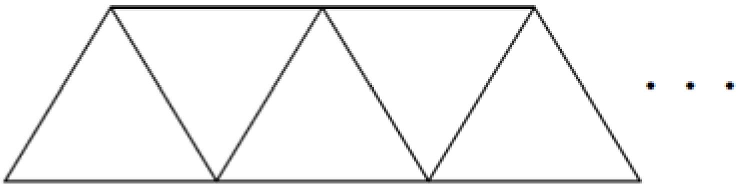
b) E quantos metros por dia fez a terceira tartaruga que demorou 32 dias para chegar?

Solução:

Se são 480 metros, então $480 \div 32 = 15$ metros por dia.

QUESTÃO 2:

Observe na imagem abaixo o padrão de uma construção de triângulos com palitos.



Mantendo o padrão da construção, responda:

a) Quantos palitos são necessários para formar 10 triângulos?

SOLUÇÃO:

Note que no primeiro triângulo utilizamos três palitos. A partir deste, para construirmos cada novo triângulo, precisamos de mais dois palitos. Na tabela abaixo constam os dados da sequência mostrada na figura acima:

Quantidade de triângulos	**Número de palitos**
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13

Observe que na construção do primeiro triângulo utilizamos três palitos e na construção dos demais dois palitos, uma vez que um dos lados já está definido.

Assim, se t é o número de triângulos construídos e p é o número de palitos que utilizamos na construção, podemos concluir que:

- $p = 3\times1 + 2\times(t - 1)$
- $p = 3x1 + 2x(10 - 1)$
- $p = 3 + 2x9$
- $p = 21$

b) Quantos palitos são necessários para formar 2022 triângulos?

SOLUÇÃO:

Se $t = 2022$, então:

$p = 3 + 2 \times (t - 1)$

$p = 3 + 2 \times (2022 - 1)$

$p = 3 + 2 \times 2021$

$p = 3 + 4042$

$p = 4045.$

Podemos, então, concluir que são necessários 4.045 palitos para formar 2.022 triângulos.

c) Com 289 palitos, quantos triângulos serão construídos?

SOLUÇÃO:

Se $p = 289$, então:
$289 = 3 + 2 \times (t - 1)$
$289 - 3 = 2 \times (t - 1)$

$286 \div 2 = t - 1$

$143 = t - 1$

$143 + 1 = t$

$144 = t$

Logo, teremos 144 triângulos formados com 289 palitos.

QUESTÃO 3:

Três prisioneiros (com excelentes habilidades em lógica Matemática) têm a chance de sair da prisão. Um deles enxerga bem com os dois olhos, o outro com somente um olho e o terceiro é cego.

O carcereiro falou aos prisioneiros que entre três chapéus marrom e dois rosa, pegaria três e colocaria sobre as cabeças deles, mas não permitiria que ninguém olhasse a cor do chapéu sobre a própria cabeça, apenas os dos outros presos. O carcereiro reuniu os três prisioneiros com os chapéus na cabeça e ofereceu-lhes a liberdade, desde que algum deles soubesse a cor do chapéu na própria cabeça. O primeiro prisioneiro a falar foi o enxergava com os dois olhos.

a) **Qual seria a situação que poderia garantir ao primeiro prisioneiro acertar o chapéu que ele usava?**

SOLUÇÃO: A única possibilidade seria ele ter visto dois chapéus rosa nas cabeças dos demais. Perceba que se o primeiro prisioneiro não ver dois chapéus de cor rosa nos demais prisioneiros, ele **não** saberá a cor do próprio chapéu.

b) **O primeiro prisioneiro negou saber a resposta. Assim, o processo foi repetido com o prisioneiro que enxerga somente com um olho. Quais as cores que ele precisaria ver nos chapéus dos outros presos que permitiria que ele acertasse a cor do seu próprio chapéu? Nesse caso, qual deveria ser essa cor?**

SOLUÇÃO: Como o primeiro prisioneiro não soube a resposta, os outros dois prisioneiros possuem dois chapéus marrom ou um marrom e um rosa. Para o segundo prisioneiro acertar, ele precisaria ver

1) Dois chapéus rosa, e assim o que está em sua cabeça é marrom; ou
2) Chapéu rosa na cabeça do prisioneiro cego para concluir que o da própria cabeça só poderia ser marrom, pois se fosse rosa, o primeiro prisioneiro teria acertado.

c) Levando em consideração que o primeiro e o segundo prisioneiros não souberam responder, o carcereiro nem se preocupou em fazer a pergunta ao prisioneiro cego, mas esse afirmou que sabia a cor do chapéu na própria cabeça. Qual era essa cor?

SOLUÇÃO: Como o segundo prisioneiro não soube responder, então o prisioneiro cego não estava de chapéu rosa (**pelo item 2**). Portanto, ele só poderia ter chapéu **marrom**.

QUESTÃO 4:

Um tabuleiro 3×3 foi inicialmente preenchido com zeros. Em seguida, a cada passo, foi escolhido um quadrado 2×2 e somou-se 11 a todos os números das quatro casas do quadrado escolhido. Por exemplo, os três primeiros passos poderiam ter sido:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

→

0	0	0
0	1	1
0	1	1

0	1	1
0	2	2
0	1	1

→

0	1	1
1	3	2
1	2	1

Depois de 28 passos, foi obtida a configuração abaixo, da qual alguns números foram apagados.

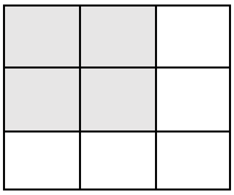
	17	
		9
7		

Complete o tabuleiro com os números que foram apagados. E descreva o processo utilizado para chegar nesses números.

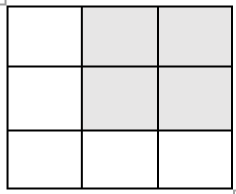
SOLUÇÃO:

Podemos escolher os quadrados 2×2 de quatro maneiras diferentes e que cada quadradinho dos cantos só está em uma Configuração.

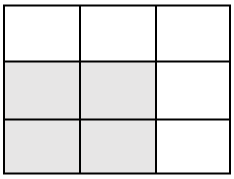
Configuração 1:



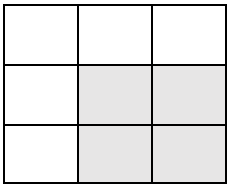
Configuração 2:



Configuração 3:



Configuração 4:



- Observe que, como o quadradinho central do tabuleiro está nas quatro configurações, ele está presente nas 28 escolhas. Então o quadradinho central recebeu 28 “uns” e, portanto, lá estava o número 28.
- Observe também que o quadradinho que contém o 17 não faz parte das duas últimas Configurações exibidas na figura acima; logo, foi escolhido um dos quadrados 2×2 das Configurações 3 e 4 por $28 - 17 = 11$ vezes. Assim, o quadradinho abaixo do central continha o número 11, já que este quadradinho faz parte das duas últimas configurações.
- Com o mesmo raciocínio, observamos que o quadradinho que contém o número 9 não faz parte das Configurações 1 e 3; logo, essas Configurações foram escolhidas $28 - 9 = 19$ vezes. Portanto, o quadradinho à esquerda do central continha o número 19.

Até agora, já recuperamos três dos números apagados:

	17	
19	28	9
7		

- O número 7 presente no tabuleiro indica que a Configuração 3 foi usada 7 vezes. Mas sabemos que as Configurações 3 e 4 foram escolhidas 11 vezes; assim, a Configuração 4 foi escolhida $11 - 7 = 4$ vezes (lembre-se de que o 7 só está na Configuração 3) e, com isso, o quadradinho do canto inferior direito contém o número 4.

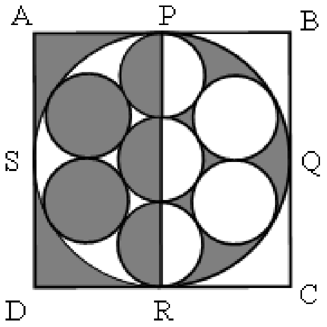
	17	
19	28	9
7	11	4

- Os números 9 e 4 que aparecem no tabuleiro nos indicam que as Configurações 2 e 4 foram escolhidas 9 vezes, mas a Configuração 4 foi escolhida apenas 4 vezes. Assim, a Configuração 2 foi escolhida $9 - 4 = 5$ vezes, já que o canto inferior direito não faz parte dela. Dessa forma, concluímos que o quadradinho do canto superior direito contém o número 5.
- Raciocinando do mesmo modo, concluímos que o quadradinho do canto superior esquerdo contém o número $19 - 7 = 12$ e o tabuleiro é, finalmente, preenchido.

12	17	5
19	28	9
7	11	4

QUESTÃO 5:

Na figura ABCD é um quadrado de lado 12cm. No interior da circunferência maior, há 7 circunferências menores de raio 2 cm, tangentes entre si. Os pontos P, Q, R e S são os pontos de tangência do quadrado ABCD com a circunferência, e também são os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA, respectivamente.



OBS: Área do círculo: $\pi \times r^2$, r é o raio e π pode ser usado como $\pi = 3,14$.

a) Qual a área da região sombreada?

SOLUÇÃO:

a) Como P e R são pontos médios dos lados do quadrado, então o segmento PR divide o quadrado em duas partes iguais. Da mesma forma, como a circunferência de raio 3 cm está inscrita no quadrado, então o segmento PR também divide a circunferência em duas partes iguais. Assim, temos que o segmento PR é o eixo de simetria da figura e a divide em partes simétricas. Com isso, temos que cada parte branca da figura apresenta uma parte cinza da mesma área. Logo, a região sombreada é a metade da área do quadrado.

$$A_{sombreada} = \frac{A_{quadrado}}{2}$$

Como o lado do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência, então o lado do quadrado mede 6 cm, e, consequentemente, sua área é $12 \times 12 = 144\, cm^2$.

Assim, a área da região sombreada é $144 \div 2 = 72\, cm^2$.

b) Determine a área da circunferência de raio 6 cm e de uma circunferência de raio 2 cm.

SOLUÇÃO:

A área de uma circunferência se dá por $\pi \times r^2$. Assim, a área da circunferência de raio 6 cm é $3,14 \times 36 = 113,04\, cm^2$ e a área da circunferência de raio 2 cm é $3,14 \times 4 = 12,56\, cm^2$.

c) Determine a área da região sombreada interior ao quadrado e exterior à circunferência de raio 6 cm.

SOLUÇÃO:

A região sombreada interior ao quadrado e exterior à circunferência de raio 6 cm corresponde a metade da diferença entre a área do quadrado e a área da circunferência de raio 6 cm.

Ou seja:

$$\frac{A_{quadrado} - A_{circ}}{2} = (144 - 36\pi) : 2 = 72 - 18\pi = 18(4 - 3,14) = 15,48\ cm^2.$$

d) Determine a área da região sombreada interior à circunferência de raio 6 cm e exterior às circunferências de raio 2 cm.

SOLUÇÃO:

A área da região sombreada interior à circunferência de raio 6 cm e exterior às circunferências de raio 2 cm corresponde à metade da diferença entre a área da circunferência de 6 cm e a área das 7 circunferências de raio 2 cm. Ou seja:

$$\frac{A_{raio6} - 7\times A_{raio2}}{2} = \frac{36\times 3,14 - 7\times 4\times 3,14}{2} = \frac{113,04 - 87,92}{2} = 12,56cm^2.$$