OMOC

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

GABARITO DO CADERNO DE QUESTÕES

NÍVEL 3 – Ensino Médio

Universidade Federal da Fronteira Sul

***Campus* Chapecó**

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

II OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

CADERNO DE RESPOSTAS

NÍVEL 3

RESOLUÇÕES

Capítulo 1 – GEOMETRIA

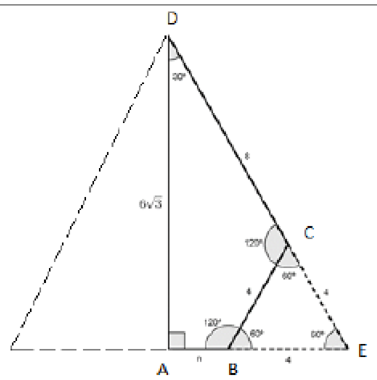
1ª Questão

ALTERNATIVA A

Prolongando-se dois lados do quadrilátero, obtemos um triângulo equilátero de lado 4 cm e um triângulo retângulo grande *DAE* que é metade de um triângulo equilátero de lado 12 cm, como indicado na figura.

Pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado *l* é $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Logo,

área de *ABCD* = (área do triângulo retângulo *DAE*) – (área do triângulo equilátero *CBE*) = $\frac{6.6.\sqrt{3}}{2} - \frac{16\sqrt{3}}{4} = 14\sqrt{3}$ cm^2.

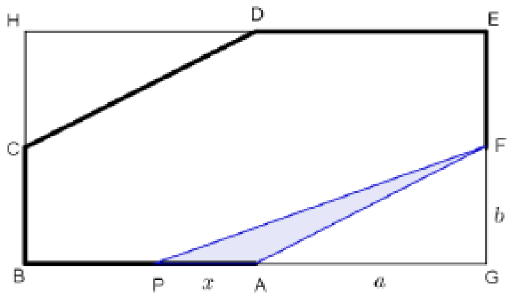


2ª Questão

ALTERNATIVA E

Sejam $\overline{AB} = \overline{AG} = a$ e $\overline{EF} = \overline{FG} = b$. Estudaremos separadamente a função *R(x)*, dependendo da posição do ponto *P* na poligonal *ABCDEF*.

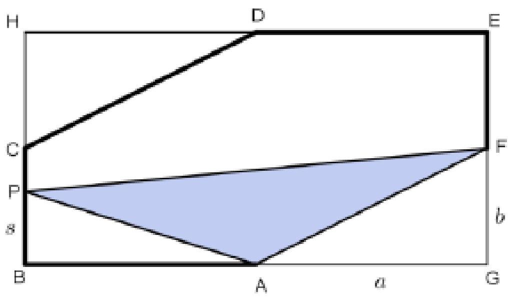
Caso 1) *P* está no segmento *AB*: $0 \le x \le a$.



Como mostra a figura, nesse caso a altura do triângulo relativa à base *AP* é sempre $\overline{FG} = b$. Assim, $R(x) = \frac{b}{2}x$.

Caso 2) *P* está no segmento *BC*: $a \le x \le a + b$.

$$\begin{cases} x = a + s, \\ 0 \le s \le b. \end{cases}$$

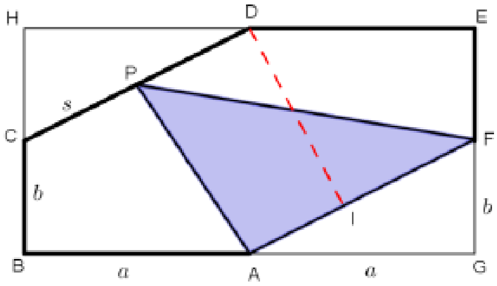


De acordo com a figura, segue que

$$R(x)=\frac{(b+s)}{2}2a-\frac{as}{2}-\frac{ab}{2}=a\frac{a+s}{2}+\frac{ab}{2}-\frac{a^2}{2}=\frac{a}{2}x+\frac{a(b-a)}{2}.$$

Caso 3) *P* está no segmento *CD*: $a+b\leq x\leq a+b+\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\begin{cases} x=a+b+s, \\ 0\leq s\leq \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$



Na figura, o segmento auxiliar *DI* é perpendicular aos segmentos paralelos *CD* e *AF*. A altura do triângulo *AFP* relativa à base *AF* permanece constante, com medida $\overline{DI}$, logo, a área do triângulo *AFP* é constante e seu valor é determinado no momento em que *P* está em *C*, ou seja,

$$R(x)=R(a+b)=\frac{a(a+b)}{2}+\frac{a(b-a)}{2}=ab.$$

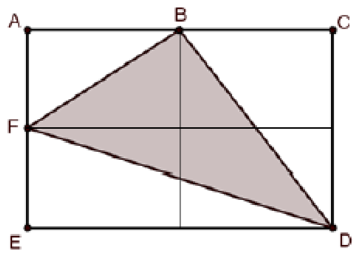
Com as informações coletadas nos casos 1, 2 e 3, percebe-se que os únicos gráficos que podem representar a área *R(x)* são os apresentados em B) e E). No entanto, observamos que, quando o ponto *P* chega ao final do percurso (ponto *F*), ou seja, quando $x=2(a+b)+\sqrt{a^2+b^2}$, o triângulo *AFP* degenera no segmento *AF*, sendo sua área igual a zero. Assim, o gráfico que melhor representa *R(x)* é o apresentado em E).

3ª Questão

ALTERNATIVA E

Sendo B e F os pontos médios dos lados AC e AE, respectivamente, podemos dividir o retângulo ACDE usando segmentos paralelos aos seus lados com extremos nesses pontos médios para observar que:

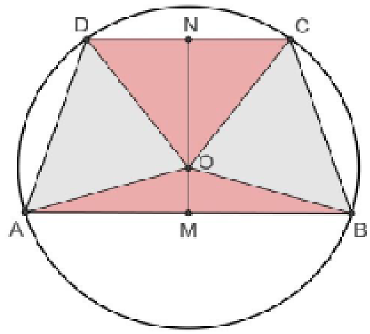
- a área do triângulo ABF é $^1/_8$ da área do retângulo ABCD, ou seja, igual a 80 cm^2;
- a área do triângulo EDF é $^1/_4$ da área do retângulo ABCD, ou seja, igual a 160 cm^2;
- a área do triângulo BCD é $^1/_4$ da área do retângulo ABCD, ou seja, igual a 160 cm^2.



A soma dessas áreas é igual a $^1/_8 + {^1/_4} + {^1/_4} = {^5/_8}$ da área do retângulo, ou ainda, 400 cm^2. Portanto, a área do triângulo BDF é igual a $^3/_8$ da área do retângulo ACDE, ou seja, é 240 cm^2.

4ª Questão

Seja *O* o centro da circunferência, *OM* a altura do triângulo *OAB* relativa à base *AB* e *ON* a altura do triângulo *OCD* relativa à base *CD*.
Como *AB* é paralelo à *CD*, segue que os pontos *M*, *O* e *N* estão alinhados e que *MN* é a altura do trapézio.



Vamos denotar $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \mathrm{r}$, $\mathrm{OM} = \mathrm{x}$ e $\mathrm{ON} = \mathrm{y}$. A altura do trapézio é, assim, igual a $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 9$ cm. Como o triângulo *OAB* é isósceles com base *AB* = 16 cm, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$\mathrm{r}^2 = 8^2 + \mathrm{x}^2$$

De forma análoga, como o triângulo *OCD* é isósceles com base *CD* = 10 cm, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$\mathrm{r}^2 = 5^2 + \mathrm{y}^2$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, e usando que $\mathrm{y}^2 - \mathrm{x}^2 = (\mathrm{y}+\mathrm{x})(\mathrm{y}-\mathrm{x})$, temos

$$(\mathrm{y}+\mathrm{x})(\mathrm{y}-\mathrm{x}) = 8^2 - 5^2 = 39$$

Embora o desenho indique que o centro da circunferência esteja dentro do trapézio, este fato pode ser confirmado pois se centro da circunferência estivesse no exterior ao trapézio, teríamos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} = 9 \\ \mathrm{y} + \mathrm{x} = \dfrac{39}{9} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

que resultariam em $\mathrm{x} = \frac{20}{3}$ e $\mathrm{y} = -\frac{7}{3}$, o que é impossível já que $\mathrm{y} > 0$. Assim, o centro da circunferência é interior ao trapézio e temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 9 \\ \mathrm{y} - \mathrm{x} = \dfrac{39}{9} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

que resultam em $\mathrm{x} = \frac{7}{3}$ e $\mathrm{y} = \frac{20}{3}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

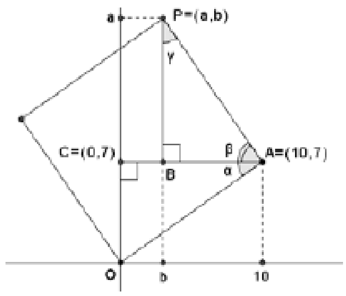
$$\mathrm{r}^2 = 8^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 64 + \frac{49}{9} = \frac{576 + 49}{9} = \frac{625}{9}$$

e, portanto,

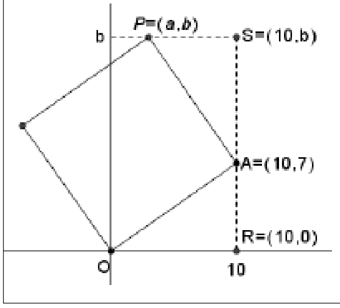
$$\mathrm{r} = \sqrt{\frac{625}{9}} = \frac{25}{3}$$

5ª Questão

ALTERNATIVA A

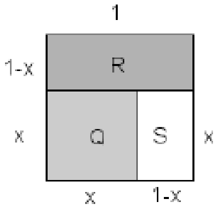


Sejam *O* a origem, *A* o ponto $(10,7)$ e *P* o ponto (a,b). Traçando por *A* uma paralela ao eixo *x* e por *P* uma paralela ao eixo *y*, determinamos os pontos *B* e *C* como na figura. Como $A = (10,7)$, temos $AC = 10$ e $OC = 3$; além disso, $OA = AP$. Denotamos por α, β e γ as medidas dos ângulos destacados. Observamos agora que, como o ângulo $O\widehat{A}P$ é reto, temos $\alpha + \beta = 90^\circ$. Por outro lado, como o triângulo *ABP* é retângulo em *B*, temos $\beta + \gamma = 90^\circ$. Segue que $\alpha = \gamma$ e então os triângulos *OAC* e *ABP* são congruentes, pois são triângulos retângulos com um ângulo (além do ângulo reto) comum e hipotenusas *OA* e *AP* iguais. Concluímos que $AB = 7$ e $BP = 10$, donde $a = 7 + 10 = 17$ e $b = 10 - 7 = 3$; logo $a + b = 3 + 17 = 20$.



Outra solução usa a figura à esquerda. Os triângulos *ORA* e *ASP* são congruentes, por argumentos semelhantes aos da primeira solução; segue que $AS = OR = 10$ e $PS = AR = 7$. Logo $a = 3$ e $b = 17$, donde $a + b = 20$.

6ª Questão



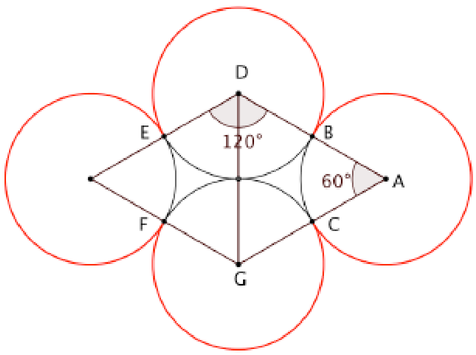
QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A

Seja x o lado do quadrado. A área de R é então $1\times(1-x)=1-x$, a área de Q é x^2 e a área de S é $x(1-x)=x-x^2$. Como as áreas de R e Q são iguais, temos $x^2=1-x$. A raiz positiva desta equação é $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, e logo a área de S é

$$x-x^2=x-(1-x)=2x-1=2\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1=\sqrt{5}-2\ \text{m}^2.$$

7ª Questão

ALTERNATIVA E



Seja r o raio comum das circunferências. Unindo os centros A, D e G de três das circunferências, como na figura ao lado, e lembrando que a reta que passa pelos centros de duas circunferências tangentes passa também pelo ponto de tangência, vemos que o triângulo ADG é equilátero, pois todos seus lados medem $2r$. Logo todos seus ângulos medem 60^o; em particular, o ângulo central $\widehat{BAC}$ mede 60^o. Segue que o arco preto $\widehat{BC}$ corresponde ao ângulo central de $60°=\dfrac{1}{6}\times 360°$, ou seja, esse arco mede $\dfrac{1}{6}$ do comprimento da circunferência, que é $\dfrac{1}{6}\times 1=\dfrac{1}{6}$; esse também é o comprimento do arco preto $\widehat{EF}$. Já o arco preto $\widehat{BE}$ corresponde a um ângulo central de 120^o; seu comprimento é então duas vezes o de um arco correspondente a 60^o, ou seja, é $2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$, que é também o comprimento do arco preto $\widehat{CF}$. Desse modo, o comprimento total dos arcos pretos é $2\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}=1$; como a soma dos comprimentos das circunferências é 4, o comprimento dos arcos vermelhos é $4-1=3$.

8ª Questão

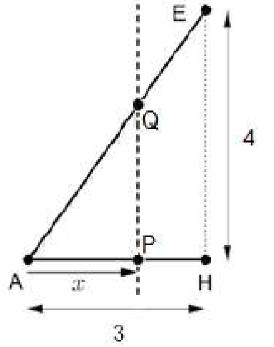
item a)

O lado AE é a hipotenusa do triângulo retângulo AEH. Observemos que $AH = AB - HB = AB - DC = 5 - 2 = 3$ e $EH = DH - DE = CB - DE = 6 - 2 = 4$. Portanto, utilizando o Teorema de Pitágoras, segue que $AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. De acordo com o enunciado, $f(3)$ é a medida do perímetro do triângulo retângulo AEH, ou seja, $f(3) = 3 + 4 + 5 = 12$.

item b)

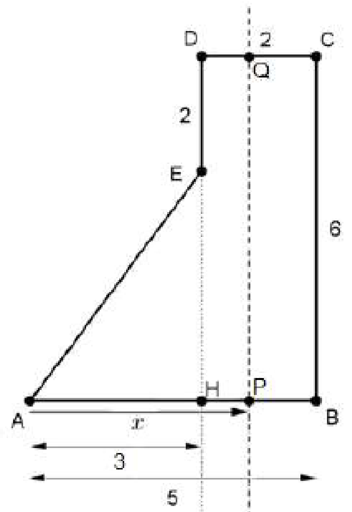
$f(5)$ é a medida do perímetro do polígono $ABCDE$, ou seja, $f(5) = 5 + 6 + 2 + 2 + 5 = 20$.

item c)



Primeiro vamos obter a expressão de $f(x)$, para $0 < x \leq 3$. Consideremos P e Q os pontos de intersecção da reta vertical com o polígono, conforme a figura ao lado. Segue que os triângulos APQ e AHE são semelhantes. Consequentemente, $\frac{x}{3} = \frac{PQ}{4}$ e $\frac{x}{3} = \frac{AQ}{5}$, ou seja, $PQ = \frac{4}{3}x$ e $AQ = \frac{5}{3}x$. Assim, para $0 < x \leq 3$, obtemos que

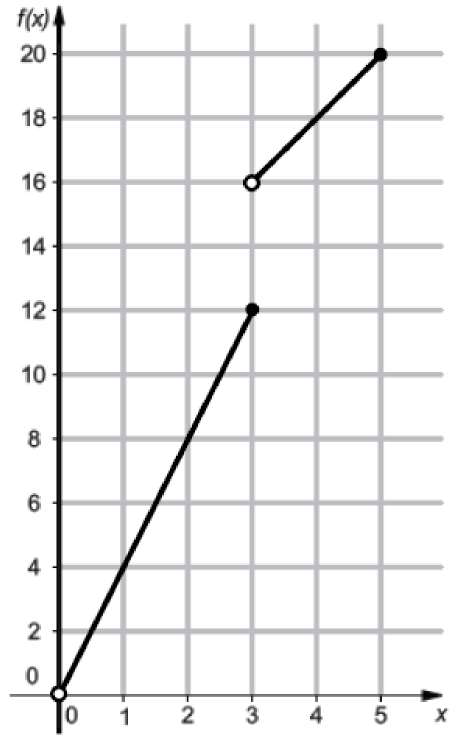
$$f(x) = AP + PQ + QA = x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x = \frac{12}{3}x = 4x$$



Como acima, consideremos agora P e Q os pontos de intersecção da reta vertical com o polígono, conforme a figura ao lado.
Para $3 < x \leq 5$,

$f(x) = AP + PQ + QD + DE + EA = x + 6 + (x - 3) + 2 + 5 = 2x + 10$.

item d)

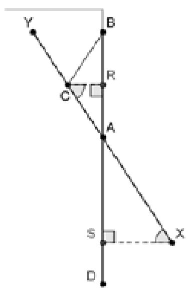


9ª Questão

Se R_1 e R_2 denotam os raios do círculo externo e interno ao heptágono, respectivamente, podemos concluir que a área procurada é $\pi \cdot R_1^2 - \pi \cdot R_2^2$. O apótema do heptágono é igual a R_2 e forma com metade do lado e o raio R_1 um triângulo retângulo. Daí, pelo Teorema de Pitágoras, temos $R_1^2 = 1^2 + R_2^2$. Assim, a área procurada é π.

10ª Questão

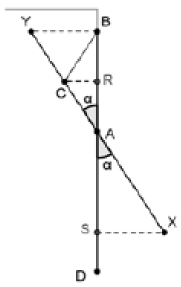
a) *1ª solução:* Na figura ao lado temos $XS = 0{,}2$ e queremos achar *CR*. Notamos que os ângulos indicados na figura com vértices em *C* e *X* são iguais, pois são determinados pelas paralelas *CR* e XS e pela transversal *XY*. Logo os triângulos retângulos *ARC* e *ASX* são semelhantes e temos



$$\frac{CR}{XS} = \frac{AC}{AX}$$

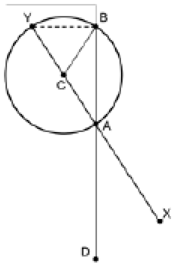
ou seja,

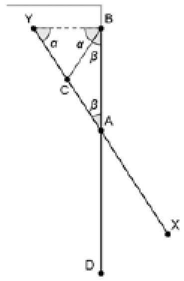
$$CR = XS \times \frac{AC}{AX} = 0{,}2 \times \frac{0{,}5}{1} = 0{,}1.$$



Podemos também argumentar como segue. A razão de semelhança entre os triângulos *ARC e ASX* é igual a $\frac{AC}{Ax} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$; como os segmentos *CR* e *XS* são correspondentes, segue que o comprimento de *CR* é a metade do comprimento de *AX*, ou seja, é igual a $0{,}1$ m.

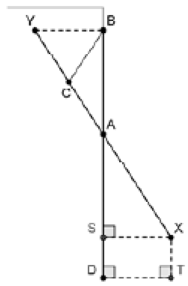
2ª solução: Denotemos por α o ângulo $D\hat{A}X$, como na figura à esquerda. Como $D\hat{A}X$ e $B\hat{A}Y$ são opostos pelos vértices, temos também $B\hat{A}Y = \alpha$. Nos triângulos retângulos *ASX* e *ARC*, temos $XS = AX \cdot \text{sen}\,\alpha = 2\text{sen}\,\alpha$ e $CR = AC \cdot \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha$. Logo $CR = \frac{1}{2} XS = 0{,}1\text{m}$.





b) *1ª solução:* Como $AC = BC = YC$ os triângulos *ACB* e *BCY* são isósceles; podemos então marcar os ângulos α e β como na figura à direita. A soma dos ângulos do triângulo *ABY* é $2\alpha + 2\beta = 180^{\circ}$; donde $\alpha + \beta = 90^{\circ}$. Logo *BY* é perpendicular ao trilho *BD*, ou seja, *BY* é horizontal qualquer que seja a posição de *Y*.

2ª solução: Como $AC = BC = YC$, podemos traçar um círculo com centro *C* e passando por *A*, *B* e *Y*, como na figura à esquerda. Como os pontos *A*, *C* e *Y* estão alinhados, o segmento *AY* é um diâmetro desse círculo. Logo o ângulo *ABY* está inscrito no semicírculo, donde sua medida é 90º; com antes, segue que *BY* é horizontal qualquer que seja a posição de *Y*.



c) Na figura à direita, queremos calcular *DT* quando $XT = 0{,}4$. Para isso, notamos primeiro que, quando a porta se fecha, *XY* coincide com *BD*; logo

$$BD = XY = XA + AC + CY = 1 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2.$$

Como *DSTX* é um retângulo, temos $SD = XT = 0{,}4$ e segue que $BS = BD - SD = 2 - 0{,}4 = 1{,}6$. Por outro lado, os triângulos *ASX* e *ABY* são congruentes; de fato, eles são ambos retângulos, seus ângulos em *X* e *Y* são iguais (como no item a)) e $AX = AY$. Logo $AS = AB$ e como $BS = 1{,}6$ segue que $AS = 0{,}8$. O teorema de Pitágoras nos diz então que

$$SX = \sqrt{AX^2 - AS^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

e concluímos que $DT = 0{,}6$ m.