OMOC

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

GABARITO DO CADERNO DE QUESTÕES

NÍVEL 3 – Ensino Médio

Universidade Federal da Fronteira Sul

Campus Chapecó

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

II OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

CADERNO DE RESPOSTAS

NÍVEL 3

RESOLUÇÕES

Capítulo 3 - NÚMEROS

1ª QUESTÃO

ALTERNATIVA D

Como 2,5 = 5 x 0,5, o tempo que o frango deve ficar no forno é 5 x 12 = 60 minutos. Logo, Paula deve colocar o frango no forno às 19 h, mas 15 minutos antes deve acender o forno. Assim, Paula deve acender o forno às 18 horas e 45 minutos.

2ª QUESTÃO

ALTERNATIVA C

Observe que o último número da linha 1 é 1, da linha 2 é $4 = 2^2$, da linha 3 é $9 = 3^2$ e assim por diante. Os números que finalizam uma linha são sempre quadrados perfeitos. Assim, como os quadrados mais próximos de 2015 são $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$, o número 2015 foi escrito na linha 45.

Observação: A afirmação "A linha n contém $2n$ -1 termos e termina com o número n^2" pode ser facilmente provada usando-se o Princípio de Indução Finita, pois ela é obviamente verdadeira para n=1 e, supondo-a verdadeira para a linha n, a linha n+1 terá $2n-1+2 = 2(n+1) -1$ termos, já que ela contém 2 termos a mais do que a anterior; além disso, o último termo da linha n+1 é $n^2 + (2n-1) + 2 = (n+1)^2$.

3ª QUESTÃO

ALTERNATIVA B

A quantidade de água que Daniela gastava por semana (isto é, em 7 dias) em cada atividade era:

- *lavar roupa*: $7 \times 150 = 1050$ litros;
- *banho de 15 minutos*: $7 \times 90 = 630$ litros;
- *lavar o carro com mangueira*: $1 \times 100 = 100$ litros.

Assim, ela gastava $1050 + 630 + 100 = 1780$ litros por semana. Com a economia, Daniela passou a gastar semanalmente em cada atividade:

- *lavar roupa no tanque*: $3 \times 150 = 450$ litros;
- *banho de 5 minutos*: $7 \times \frac{90}{3} = 7 \times 30 = 210$ litros;
- *lavar o carro com balde*: $1 \times 10 = 10$ litros,

ou seja, um total de $450 + 210 + 10 = 670$ litros. Portanto, ela passou a economizar por semana $1780 - 670 = 1110$ litros de água.

Podemos também pensar diretamente na economia semanal da Daniela:

- 4 *lavagens de roupa*: $4 \times 150 = 600$ litros;
- $\frac{2}{3}$ *banho por dia*: $7 \times \frac{2}{3} \times 90 = 420$ litros;
- *substituir a mangueira pelo balde*: $100 - 10 = 90$,

o que nos dá o total de $600 + 420 + 90 = 1110$ litros.

4ª QUESTÃO

ALTERNATIVA D

A área de uma circunferência é proporcional ao quadrado do diâmetro. Como uma pizza grande tem diâmetro duas vezes maior que o de uma pequena, se a área de uma pizza pequena é A então a área de uma grande é $4A$. Três fatias de uma pizza grande têm área $\frac{3}{16} \times 4A = \frac{3}{4}A$, ou seja, correspondem a $\frac{3}{4}$ de uma pizza pequena.

Pode-se também resolver esta questão usando a fórmula da área de uma circunferência. Seja r o raio da pizza pequena; então sua área é πr^2. O raio da pizza grande é $2r$ e sua área é $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$. Três fatias da pizza grande têm área $\frac{3}{16}\left(4\pi r^2\right) = \frac{3}{4}\pi r^2$, ou seja, $\frac{3}{4}$ da área de uma pizza pequena.

5ª QUESTÃO

ALTERNATIVA D

O comprimento da mesa é $8 \times 22 = 176$ centímetros; logo, o palmo de Carolina mede $176 \div 11 = 16$ centímetros.

6ª QUESTÃO

ALTERNATIVA E

Vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 times que foram eliminados após perder 2 partidas cada um, contamos $56 \times 2 = 112$ derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi $112 + 1 = 113$. Além disso, como não houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.

7 ª QUESTÃO

ALTERNATIVA B

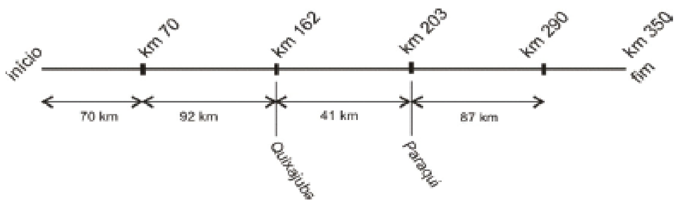
Lembramos primeiro que, se a e b são números naturais, dizer que a é múltiplo de b (ou b divide a) é dizer que existe outro número natural c tal que $a = bc$. O algoritmo da divisão nos diz que, se $b \neq 0$, existem únicos inteiros q e r tais que $a = qb + r$ e $0 \leq r < |b|$; os números q e r são ditos, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b (se $r = 0$, temos o caso em que a é múltiplo de b).

Seja agora n o número natural do enunciado. Como $n + 1$ é múltiplo de 11, existe um número natural t tal que $n + 1 = 11t$; do mesmo modo, existe um número natural s tal que $n - 1 = 8s$. Multiplicando membro a membro essas expressões, temos $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 = 88ts$, ou seja, $n^2 = 88ts + 1$. Essa última expressão mostra que o resto da divisão de n^2 por 88 é 1.

8ª QUESTÃO

ALTERNATIVA B

Na figura a seguir, admitimos que a estrada de 350 km começa à esquerda e termina à direita; também não faz diferença supor que Quixajuba esteja à esquerda de Paraqui.



Vamos explicar como foi feita a figura. Notamos que Quixajuba não pode estar à esquerda do quilômetro 70, pois nesse caso ela estaria antes do início da estrada. Logo ela está à direita do quilômetro 70 e fica no quilômetro $70 + 92 = 162$ da estrada. Do mesmo modo vemos que Paraqui está à esquerda do quilômetro 270 e fica no quilômetro $290 - 87 = 203$. Portanto, a distância entre as duas cidades é $203 - 162 = 41$ quilômetros.

9ª QUESTÃO

ALTERNATIVA A

Se considerarmos a soma dos números:

130 ⇨ alunos que comem carne
150 ⇨ alunos que comem massa
70 ⇨ alunos que não comem carne nem massa,

teremos um total de 350 pessoas.

Nesta soma contamos duas vezes os alunos que comeram carne e macarrão, ou seja, ela é igual ao número total T de alunos, acrescentado de (1/6)T, que é o número de estudantes que comeram carne e macarrão, fornecido pelo enunciado.

Teremos então 350 = T + (1/6) T = (7/6) T. Logo T = 300 e (1/6) T = 50. Assim, comeram apenas carne 130 – 50 = 80 alunos.

10ª QUESTÃO

item a)

O resultado de Júlia com o número 3 é $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$.

.item b)

Utilizando as formas de fatoração, temos que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = 1320$$

Isto nos diz que o produto de três números consecutivos é 1320. Usando cálculos mentais, por aproximação, como $10^3 = 1000$ e como a unidade do número 1320 é 0, testamos $n = 11$. Nesse caso, como 11 x 10 x 12 = 1320, concluímos que, de fato, $n = 11$ deve ter sido o número escolhido por Júlia para que ela tenha obtido 1320 como resultado. Observe que outro teste natural seria 14 x 13 x 15, que também tem unidade 0, mas é maior do que 1320.

item c)

Para um número ser múltiplo de 6, ele deve ser múltiplo de 2 e de 3. Como vimos no item b), o resultado é o produto de três números inteiros positivos consecutivos. Como dentre os três números consecutivos pelo menos um deles é par, temos que o resultado é par. Para mostrar que o número encontrado é múltiplo de 3, basta verificar que um dos três números: n, $(n-1)$ ou $(n+1)$, é múltiplo de 3. Observe que:

- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 1, então $n + 1$ será múltiplo de 3;

- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 2, então n será múltiplo de 3;

- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 0, então ele mesmo será múltiplo de 3.

Em qualquer um dos casos, o resultado de Júlia, isto é, $n(n-1)(n+1)$, será sempre um múltiplo de 2 e de 3; portanto, um múltiplo de 6.