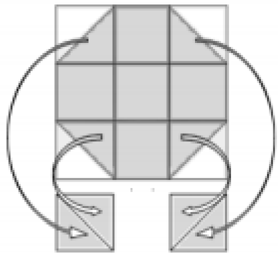
ALTERNATIVA B



Como os vértices da figura destacada (um octógono) dividem os lados do quadrado em três partes iguais, podemos ligá-los de forma a obter um quadriculado que divide o quadrado em nove quadradinhos iguais. A figura cuja área conhecemos é formada por cinco desses quadradinhos e quatro triângulos, os quais são, cada um deles, metade de um quadradinho.

Reunindo esses quatro triângulos dois a dois, como na figura, teremos mais dois quadradinhos; portanto, o octógono, cuja área é 28 cm^2, é equivalente a 5 + 2 = 7 quadradinhos. A área de cada um dos quadradinhos é, portanto, igual a 28 $\div$ 7 = 4 cm^2. Como o quadrado equivale a nove quadradinhos, sua área é 9 x 4 = 36 cm^2.

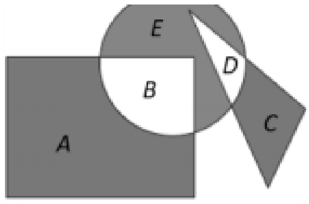
ALTERNATIVA B

Como o resultado da conta é 20000, e como cada letra representa um algarismo diferente, então,

- somando os algarismos das unidades teremos $P + M = 10$, ou seja, P e M são tais que na casa das unidades do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das dezenas teremos $1 + E + B = 10$, ou seja, E e B são tais que na casa das dezenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das centenas teremos $1 + M + O = 10$, ou seja, M e O são tais que na casa das centenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das unidades de milhar teremos $1 + B = 10$, ou seja, B é tal que que na casa das unidades de milhar do resultado fica zero e vai um;
- e, finalmente, somando os algarismos das dezenas de milhar teremos $1 + O = 2$.

Logo, $O = 2 - 1 = 1$, $B = 10 - 1 = 9$, $M = 10 - 1 - O = 8$, $E = 10 - 1 - B = 0$ e $P = 10 - M = 2$. Assim, OBMEP representa o número 19802, OBM representa o número 198. A letra P representa o algarismo 2.

ALTERNATIVA A



Rotulamos as áreas como na figura ao lado. A soma das áreas das regiões azuis é $A + C$, e a área da região vermelha é E. Queremos calcular $A + C - E$. Como $A + B$ é a área do retângulo, $C + D$ é a área do triângulo e $B + D + E$ é a área do círculo, temos:

$$A + C - E = (A + B) + (C + D) - (B + D + E) = 120 + 29 - 81 = 68 \text{ cm}^2.$$

Outra solução: A diferença pedida pode ser calculada por uma "balança que pesa áreas", como na Figura 1; nela o prato esquerdo "pesa" 81 cm^2 (círculo completo) e o prato direito pesa $120 + 29 = 149$ cm^2 (retângulo e triângulo completos); a diferença entre os pesos é $149 - 81 = 68$ cm^2. O resultado dessa "pesagem" não muda quando retiramos áreas iguais (partes brancas *B* e *D*) dos dois pratos, como na Figura 2. Logo, a diferença entre a soma das áreas azuis e a área vermelha é 68 cm^2.

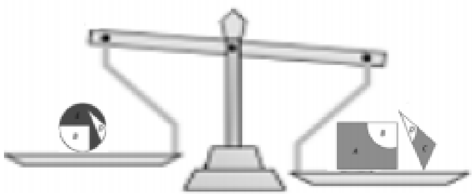


Figura 1

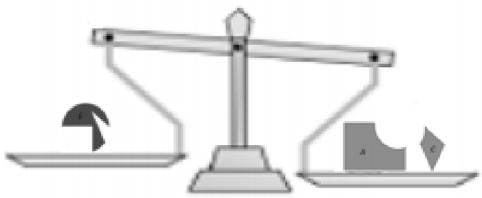
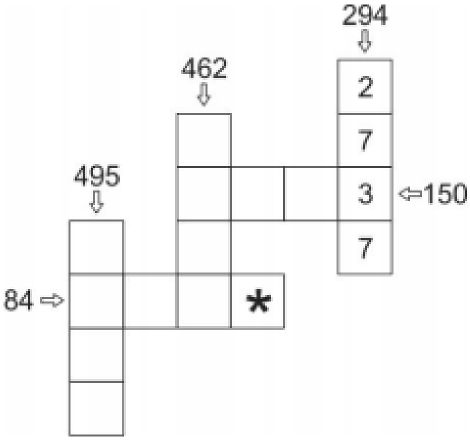


Figura 2

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA A

Inicialmente, observamos que as decomposições em fatores primos dos números que aparecem no enunciado são:
462 = 2.3.7.11
150 = 2.3.5.5
495 = 3.3.5.11
84 = 2.2.3.7
Na interseção de 150 com 462, deve aparecer o 2, pois o 3 já está na interseção de 150 com 294.
A interseção de 495 com 84 deve ser preenchida com o 3, pois é o único fator primo comum entre esses dois números. Desta forma, sobra o 7 para a interseção de 462 com 84.
Então, como a fatoração do 84 é 3 . 2 . 7 . 2, concluímos que $*$ = 2.



ALTERNATIVA C

Vamos pensar nas netas como as letras A, B, C, D e E e descrever a ordem em que elas chegaram como uma sequência dessas letras, lida da esquerda para a direita. O enunciado nos diz que nessa sequência

1. o B está à esquerda do A (Beatriz chegou antes de Ana);
2. o B está à direita do D (Beatriz chegou depois de Daniela);
3. o bloco CDE aparece sem letras intermediárias e com as letras nessa ordem (Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem).

As informações 2 e 3 mostram que o B aparece à direita do bloco CDE, e a informação 1 diz que o A está à direita do B. A nossa sequência é, então, CDEBA, e concluímos que a primeira a chegar foi Cláudia.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA B

A figura 1 é formada por 5 bolinhas em formato de Y e, a partir dela, quando passamos de uma figura para a seguinte, a próxima figura tem 3 bolinhas acrescidas, sendo uma em cada ponta do Y. Logo, a 15ª figura terá $5 + 3 \times 14 = 47$ bolinhas.
Mais geralmente, a quantidade de bolinhas na n-ésima figura é 5 +3(n-1) = 3n +2.

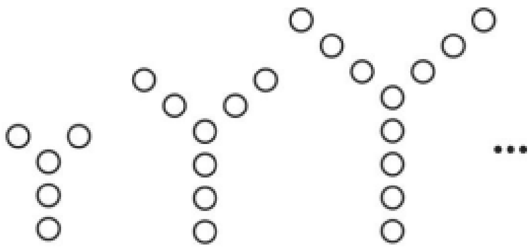


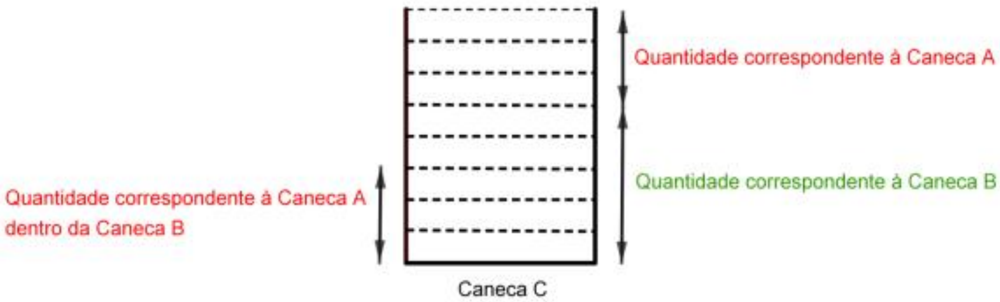
Figura 1 Figura 2 Figura 3

ALTERNATIVA D

Ao despejar o conteúdo das canecas A (pequena) e B (média) cheias na Caneca C (grande) será ocupado

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$$

da capacidade da Caneca C, ou seja, ela ficará totalmente cheia, sem transbordar. De forma ilustrativa, dividindo a Caneca C em 8 partes iguais, a figura a seguir mostra que 5 dessas partes correspondem à capacidade da Caneca B, e as outras 3, à capacidade da Caneca A.



ALTERNATIVA B

Como um dos palpites foi 234, o número de sementes na abóbora deve ser um dos números:

234 – 31 = 203, 234 – 17 = 217, 234 – 9 = 225, 234 + 9 = 243, 234 + 17 = 251 ou 234 + 31 = 265.

Como um dos palpites foi 260, o número de sementes na abóbora deve ser um dos números:

260 – 31 = 229, 260 – 17 = 243, 260 – 9 = 251, 260 + 9 = 269, 260 + 17 = 277 ou 260 + 31 = 291.

Os únicos números que aparecem nas duas listas acima são 243 e 251. Se o número de sementes na abóbora fosse 243, o palpite 274 estaria errado por 31, que é coerente com o enunciado. Entretanto, se o número de sementes na abóbora fosse 251, o palpite 274 estaria errado por 23, o que não é coerente com o enunciado.

Logo, o número de sementes na abóbora é 243 = 10 x 24 + 3 e, no último montinho, havia 3 sementes.

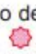
Outra solução: A diferença entre o maior e o menor palpite é 274 – 234 = 40. Como nenhum palpite está errado por mais de 40, concluímos que o número correto de sementes está entre 234 e 274. Desta forma, a soma dos erros, em valor absoluto, cometidos pelo menor palpite e pelo maior palpite deve ser igual a 40. Dentre os erros informados no enunciado, o único par cuja soma é 40 é (9, 31). Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) o número de sementes é 234 + 9 = 243 ou

2ª) o número de sementes é 234 + 31 = 265.

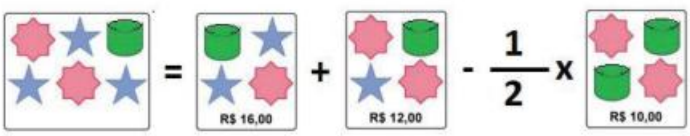
No primeiro caso, os erros cometidos pelos palpites 234, 260 e 274 são, respectivamente, 9, 17 e 31, coerentes com o enunciado. No segundo caso, esses mesmos erros são, respectivamente, 31, 5 e 9, incoerentes com o enunciado. Portanto, o número de sementes é 243. Como 243 = 24 x 10 + 3, no último montinho havia 3 sementes.

ALTERNATIVA E

Observe que a cartela com seis adesivos é idêntica à primeira cartela acrescida dos adesivos  e . Logo, o preço da cartela com seis adesivos é igual a 16 reais mais o preço desses dois adesivos. Por outro lado, esses dois adesivos aparecem na segunda cartela juntamente com os adesivos  e , mas esses dois últimos adesivos juntos custam 5 reais, como mostra a terceira cartela. Logo, o preço dos adesivos  e , juntos, é 12 – 5 = 7 reais e, como consequência, a cartela com seis adesivos custa 16 + 7 = 23 reais.

Observe uma variação da solução:

Ou seja,



Portanto, o preço da cartela com seis adesivos é igual a 16 + 12 – 5 = 23 reais.

ALTERNATIVA B

A quantidade de produtos comprada multiplicada por 99 deve ser um número terminado em 71, pois Juca gastou R$ 41,71 na loja. Logo, a quantidade de produtos comprada só pode ser 29, 129, 229, e assim por diante. A única maneira de ter um gasto de R$ 41,71 ocorre com a compra de 29 produtos, pois as demais possibilidades superam esse valor.

Essa ideia, com explicação ligeiramente diferente, é apresentada abaixo:

O preço de qualquer produto da loja é um número inteiro de reais menos um centavo. Por exemplo, R$ 3,99 = R$ 4,00 – R$ 0,01. Logo, para comprar uma certa quantidade de produtos, Juca pagou um número inteiro de reais (isto é, sem incluir centavos) menos a quantidade de produtos comprada multiplicada R$ 0,01. Em outras palavras, se Q é a quantidade de produtos que Juca comprou,

$$41,71 + Q \times 0,01$$

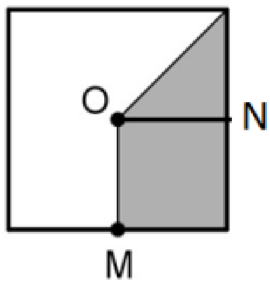
deve ser um número inteiro. Logo, 41,00 + 0,71 + Q x 0,01 deve ser um número inteiro e, forçosamente, 0,71 + Q x 0,01 deve ser um número inteiro. Logo, Q só pode ser 29, 129, 229 e assim por diante. Se Juca tivesse comprado 129 ou mais produtos, ele teria gasto, pelo menos, 129 x R$ 0,99 = R$ 127,71. Portanto, Juca comprou exatamente 29 produtos.

Observe que há várias maneiras de Juca ter comprado os 29 produtos; por exemplo, ele poderia ter comprado 28 produtos por R$ 0, 99 cada mais um produto por R$ 13,99, mas também ele poderia ter comprado 27 produtos por R$ 0,99, mais dois produtos: um custando R$ 1,99 e outro custando R$ 12,99. Em qualquer situação, no total, ele deve ter comprado exatamente 29 produtos.

QUESTÃO 7

ALTERNATIVA D

Podemos decompor a figura sombreada em um quadrado e um triângulo, traçando um segmento de O até o ponto médio N do lado do quadrado, conforme indicado na figura. Assim, a área da região sombreada é igual a (1/4) + (1/8) da área do quadrado com centro em O, ou seja, a área sombreada é igual a 5 + 2,5 = 7, 5 cm^2.



ALTERNATIVA D

Basta observar a disposição das últimas páginas dos dois livros:

Portanto, a distância entre a última página do Volume I até a última página do Volume II é

$$\underbrace{5}_{\text{Espessura do miolo do Vol I}} + \underbrace{0,25}_{\text{Capa da frente do Vol I}} + \underbrace{0,25}_{\text{Capa da frente do Vol II}} + \underbrace{5}_{\text{Espessura do miolo do Vol II}} = 10,5 \text{ cm}$$

ALTERNATIVA D
Usando a figura, e lembrando que o sentido da contagem muda aos serem falados os números 7, 14, 21, 28, podemos verificar que os números a serem falados por Ana e Beatriz serão:
Ana: 1, 6, 8, 13, 15, 20, 22, 27, 29, ...
Beatriz: 2, 7, 12, 16, 21, 26, 30, ...
Como a contagem 29, 30, 31, 32 será feita no sentido horário, concluímos que Carolina dirá o número 31 e Diana falará o número 32.

<u>Outra solução</u>: Como o sentido muda em Beatriz ao dizer 7, muda em Elaine ao dizer 14, muda em Beatriz ao dizer 21, muda em Elaine ao dizer 28, voltando ao sentido horário, Ana dirá 29, Beatriz 30, Carolina 31 e Diana 32.

23 *Quadrado mágico I – Solução*

A soma comum às linhas, colunas e diagonais é $16+10+4=30$. Analisando as somas das linhas e colunas, temos:

I) De $2+10+e=30$, segue que $e=18$.

II) De $b+e+4=30$, segue que $b=8$.

III) De $16+c+b=30$, segue que $c=6$.

IV) De $16+2+a=30$, segue que $a=12$.

Portanto, $a+b+c=26$.

Primeira Solução:

item a)

Para comparar as frações, vamos escrevê-las como frações equivalentes, todas com o mesmo denominador 14, para depois comparar os numeradores.

André retirou $\frac{1}{2}=\frac{7}{14}$ do pacote, Bernardo retirou $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}$ do pacote e Carlos retirou $\frac{1}{14}$ do pacote. Logo, quem retirou o menor número de doces foi Carlos.

item b)

A fração que representa o total de doces no pacote é $1=\frac{14}{14}$. Portanto, a fração que representa a quantidade dos doces que restaram no pacote com relação ao total de doces é

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{1}{14}\right)=1-\left(\frac{7}{14}+\frac{4}{14}+\frac{1}{14}\right)=\frac{14}{14}-\frac{12}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}.$$

item c)

O número de doces de André (que é $\frac{1}{2}=\frac{7}{14}$ do pacote) menos 15 doces é igual ao número de doces de Bernardo (que é $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}$ do pacote). Logo, o número de doces de André é igual ao número de doces de Bernardo somado a 15. Portanto, a diferença entre o número de doces de André e o número de doces de Bernardo é igual a 15, ou seja,

$\frac{1}{2}-\frac{2}{7}=\frac{7}{1}-\frac{4}{}=\frac{3}{}$ corresponde a 15 doces. Se $\frac{3}{}$ do pacote corresponde a 15

doces, er

doces, já

Deste mo

item a)

Observando na figura acima as quantidades que correspondem às retiradas de André, Bernardo e Carlos, concluímos que quem retirou a menor quantidade de doces foi Carlos. A quantidade retirada por Carlos corresponde a um único quadradinho.

item b)

A quantidade de doces que restou está representada na figura abaixo pelos dois últimos quadradinhos hachurados; portanto, deve ser igual a 2 x (1/14) = 1/7 do total.

Segunda Solução:

Nesta solução, representamos as frações 1/2, 2/7 e 1/14 como partes de um mesmo todo (o pacote de doces), que será representado por

Como $\frac{1}{2}=\frac{7}{14}$ e $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}$, dividimos o todo em 14 pedaços iguais e, deste modo, cada um desses pedaços representará $\frac{1}{14}$ do pacote de doces: