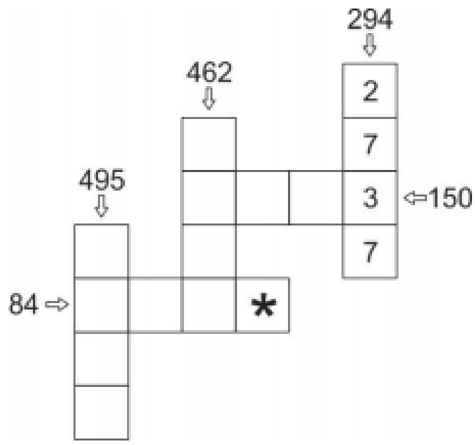
QUESTÃO 7
ALTERNATIVA A



Inicialmente, observamos que as decomposições em fatores primos dos números que aparecem no enunciado são:
462 = 2.3.7.11
150 = 2.3.5.5
495 = 3.3.5.11
84 = 2.2.3.7
Na interseção de 150 com 462, deve aparecer o 2, pois o 3 já está na interseção de 150 com 294.
A interseção de 495 com 84 deve ser preenchida com o 3, pois é o único fator primo comum entre esses dois números. Desta forma, sobra o 7 para a interseção de 462 com 84.
Então, como a fatoração do 84 é 3 . 2 . 7 . 2, concluímos que $*$ = 2.

ALTERNATIVA E
Digamos que o preço da camiseta é X. Após o primeiro desconto, passa a ser X – 0,1X = 0,9X. Após o segundo desconto, passa para 0,9X – 0,2(0,9X) = 0,9X – 0,18X = 0,72X. Como esse preço final é R$ 36,00, temos

0,72X = 36 → X = 36/0,72 = 50.

O preço original da camiseta era, portanto, R$ 50,00.

ALTERNATIVA A
Reescrevendo as frações da equação com um mesmo denominador comum e cancelando esse denominador, temos:

$$\frac{a}{11}+\frac{\mathrm{b}}{3}=\frac{31}{33}\Leftrightarrow\frac{3a}{33}+\frac{11b}{33}=\frac{31}{33}\Leftrightarrow 3a+11b=31$$

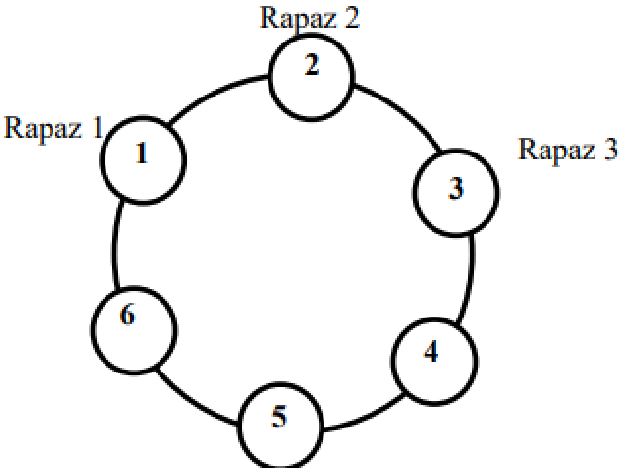
Logo, como a e b são um inteiros positivos, b só pode assumir os valores 1, 2, senão o primeiro membro da última igualdade seria maior do que 31. Temos as seguintes possibilidades:

- $b=1\Rightarrow 3a+11=31\ \Rightarrow 3a=20$, impossível, pois a é inteiro.
- $b=2\Rightarrow 3a+22=31\ \Rightarrow 3a=9\Rightarrow a=3$.

Assim, $a=3$, $b=2$ e, portanto, $a+b=5$.

ALTERNATIVA D

Os rapazes devem se sentar juntos ao redor da mesa; escolhemos primeiramente três posições vizinhas e a ordem dos rapazes nas posições escolhidas: isso pode ser feito de 6 x 6 = 36 modos diferentes. Fixemos uma dessas escolhas. Para raciocinar, digamos que foi escolhida a seguinte acomodação para os rapazes (observe que não há perda de generalidade aqui):



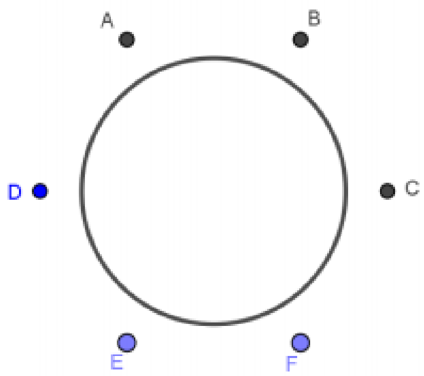
Vamos pensar na acomodação das moças. Na cadeira de número 6 não deve se sentar a namorada do rapaz 1 e, assim, há dois casos a considerar:

- Na cadeira 6 senta-se a moça que namora o rapaz 2. Nesse caso, como na cadeira 4 não deve se sentar a moça que namora o rapaz 3, há somente uma possibilidade de acomodação das moças. Fazendo variar a posição dos rapazes, há, portanto, um total de 1 x 36 = 36 possibilidades.
- Na cadeira 6 senta-se a moça que namora o rapaz 3. As cadeiras 4 e 5 podem ser usadas pelas namoradas dos rapazes 1 e 2 (duas possibilidades). Fazendo variar a posição dos rapazes, há, portanto, um total de 2 x 36 = 72 possibilidades.

Somando os dois casos acima, concluímos que há 36 + 72 = 108 possibilidades de ocupar as cadeiras, de acordo com as exigências do enunciado.

OUTRA SOLUÇÃO:

Pensando primeiramente no trio de homens, chamaremos o que fica entre os outros dois de “homem central” e os outros dois de “homem da direita” e “homem da esquerda”.
Em qual cadeira ficará o homem central? 6 possibilidades.
Qual será o homem central? 3 possibilidades.
Qual será o homem da direita? 2 possibilidades.
Qual será o homem da esquerda? 1 possibilidade.
Após posicionados os homens, vamos chamá-los de A, B e C, e as respectivas namoradas de A’, B’ e C’.

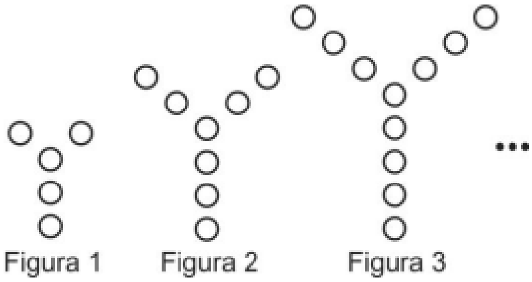


Basta decidir agora em qual cadeira B’ (namorada do homem central) se sentará, pois, após ela se sentar, as posições das outras namoradas ficarão amarradas.
Qual será a posição de B’? 3 possibilidades.
Qual será a posição de A’? 1 possibilidade.
Qual será a posição de C’? 1 possibilidade.
Assim, o número de maneiras de arrumar os 3 casais nas condições estabelecidas é:

N = 6 x 3 x 2 x 1 x 3 x 1 x 1 = 108.

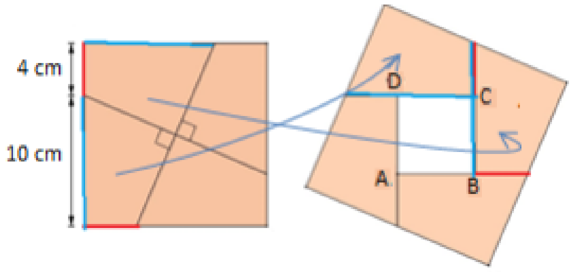
QUESTÃO 15
ALTERNATIVA B

A figura 1 é formada por 5 bolinhas em formato de Y e, a partir dela, quando passamos de uma figura para a seguinte, a próxima figura tem 3 bolinhas acrescidas, sendo uma em cada ponta do Y. Logo, a 15ª figura terá $5 + 3 \times 14 = 47$ bolinhas.
Mais geralmente, a quantidade de bolinhas na n-ésima figura é 5 +3(n-1) = 3n +2.



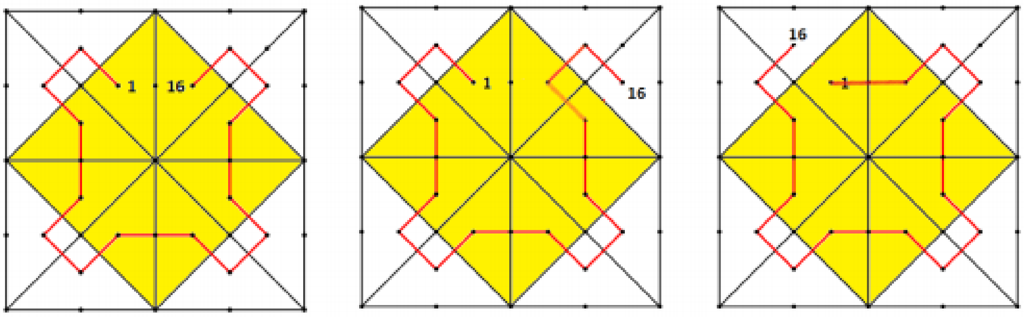
QUESTÃO 14
ALTERNATIVA C

Ao rearranjarmos os quadriláteros, observamos que os lados com comprimentos conhecidos ficam encostados, com uma das extremidades em comum, como indicado na figura (o segmento menor, em vermelho, torna-se parte do segmento maior, em azul). O comprimento dos lados do quadrado *ABCD* é a diferença entre os comprimentos desses lados: 10 – 4 = 6 cm. Portanto, a área desse quadrado é 36 cm^2.

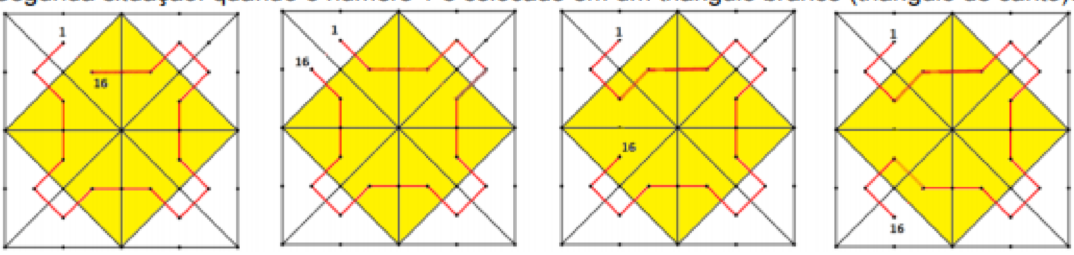


ALTERNATIVA D

Vamos dividir o problema em duas situações.
Primeira situação: quando o número 1 é colocado em um dos 8 triângulos indicados na figura abaixo pela cor amarela (triângulos centrais).



Escolhido qualquer um dos 8 triângulos amarelos para colocar o número 1, haverá 3 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8 x 3 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.
Segunda situação: quando o número 1 é colocado em um triângulo branco (triângulo de canto).



Escolhido qualquer um dos 8 triângulos brancos para colocar o número 1, haverá 4 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8 x 4 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.
Somando-se as quantidades obtidas nas duas hipóteses, obtemos que o número de maneiras é 8 x 3 + 8 x 4 = 24 + 32 = 56.

ALTERNATIVA C

Um aluno pode acertar de 1 a 4 questões ou errar todas. A média é dada por

$0{,}05 \times 1 + 0{,}40 \times 2 + 0{,}25 \times 3 + y \times 4 = 2$,

em que y representa a porcentagem de alunos que acertou 4 questões. Note que incluir o zero não altera a média. Temos que $y = 0{,}10$, ou seja, 10% dos alunos acertaram 4 questões e, portanto, 100% - (5%+40%+25%+10%) = 20% dos alunos erraram todas as questões.

ALTERNATIVA D

De acordo com o enunciado, cada termo, a partir do terceiro, é igual à diferença entre seus dois antecessores imediatos. Assim, percebemos que a sequência é periódica, uma vez que, dando continuidade à sua construção, observamos que seus termos repetem-se a cada 6 posições. Esse fato é evidente, pois o sétimo termo é igual ao primeiro e o oitavo, igual ao segundo. Consequentemente, o nono é igual ao terceiro, pois é o resultado da mesma diferença, como vemos abaixo:

1, 5, 4, -1, -5, -4 = -5 - (-1), 1 = -4 - (-5), 5 = 1 - (-4), ...

Consequentemente, como 1000 = 6 x 166 + 4 = 996 + 4, os primeiros 1000 termos da sequência são obtidos justapondo-se 166 blocos contendo exatamente os 6 primeiros números da sequência, seguidos dos quatro primeiros números (da sequência), como indicado abaixo:

$$\underbrace{1, 5, 4, -1, -5, -4}_{1^{\circ}\text{ bloco}},\ \underbrace{1, 5, 4, -1, -5, -4}_{2^{\circ}\text{ bloco}},\ \ldots,\ \underbrace{1, 5, 4, -1, -5, -4}_{166^{\circ}\text{ bloco}},\ 1, 5, 4, -1$$

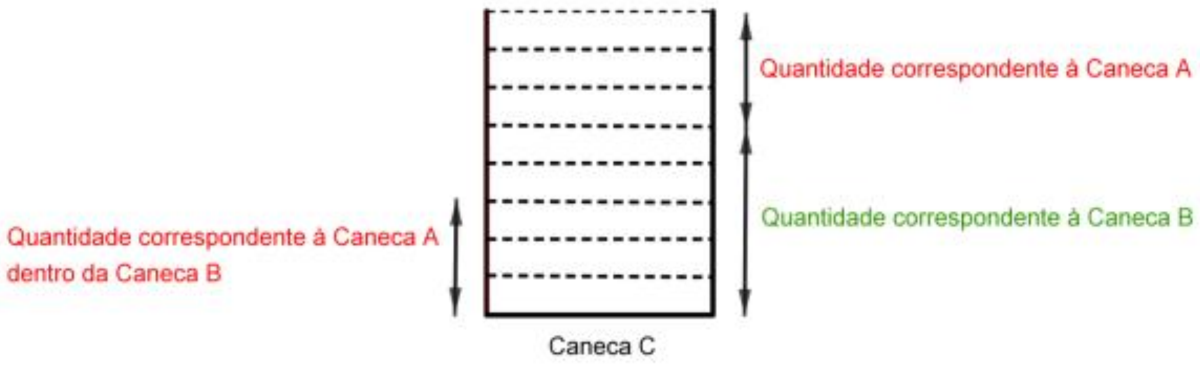
Finalmente, como a soma dos números em cada bloco é igual a zero, concluímos que a soma dos 1000 primeiros números da sequência é igual a soma dos últimos quatro termos, a saber, 1 + 5 + 4 + (-1) = 9.

ALTERNATIVA D

Ao despejar o conteúdo das canecas A (pequena) e B (média) cheias na Caneca C (grande) será ocupado

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

da capacidade da Caneca C, ou seja, ela ficará totalmente cheia, sem transbordar. De forma ilustrativa, dividindo a Caneca C em 8 partes iguais, a figura a seguir mostra que 5 dessas partes correspondem à capacidade da Caneca B, e as outras 3, à capacidade da Caneca A.



ALTERNATIVA B

Denote por L e l os lados dos quadrados grande e pequeno, respectivamente. Do enunciado, temos que

$$4L+4l=L^2-l^2 \Rightarrow 4(L+l)=(L+l)(L-l)$$

Como $L+l\neq 0$, $L-l=4$.

ALTERNATIVA C

Como a primeira página do Capítulo 1 é a de número 1, e como os três capítulos têm a mesma quantidade de páginas, o número da primeira página do Capítulo 2 é igual à quantidade de páginas de um capítulo mais 1 e o número da primeira página do Capítulo 3 é igual ao dobro da quantidade de páginas de um capítulo mais 1. Logo, a soma do número da primeira página do Capítulo 2 com o número da primeira página do Capítulo 3 é igual ao triplo da quantidade de páginas de um capítulo mais 2, ou seja, a quantidade de páginas de um capítulo é $\frac{1052-2}{3}=350$. Logo, o número da primeira página do Capítulo 3 é $2\times 350+1=701$.

Algebricamente, se x é o número de páginas de um capítulo e se n é o número da primeira página do Capítulo 3, então $1052=3x+2\Rightarrow x=350$ e $n=2x+1\Rightarrow n=701$.

a) Temos que $2\cdot 8=3+4+a$, segue que $a=9$.

b) Seja $1b.cd2$ um número TOP. Temos que $b+c+d=2$, sendo que todas as possibilidades (b,c,d), são $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(0,2,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(2,0,0)$, ou seja, são 6 números TOP.

c) Seja $9e.fgh$ um número TOP. Vamos analisar todos os casos iniciando pelos possíveis valores de h:

I) Se $h=0$, então $e+f+g=0$, cuja única possibilidade é $(0,0,0)$.

II) Se $h=1$, então $e+f+g=9$, ou seja, para $e=0$, são 10 possibilidades para f (de 0 a 9) e g fica determinado; para $e=1$, são 9 possibilidades para f e g fica determinado; para $e=2$, são 8 possibilidades para f; e assim por diante até $e=9$ e 1 possibilidade para f, ou seja, o total de possibilidades para $h=1$ é $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$.

III) Se $h=2$, então $e+f+g=18$, ou seja, para $e=0$, existe apenas uma combinação para f e g que é $f=g=9$; para $e=1$ são 2 possibilidades para f e g; para $e=2$, são 3 possibilidades; para $e=3$, são 4 possibilidades; e assim por diante até $e=9$, que são 10 possibilidades. Neste caso, temos, portanto, $1+2+3+4+\ldots+10=55$ possibilidades.

IV) Se $h=3$, então $e+f+g=27$, que possui apenas a solução $e=f=g=9$.

V) Se $h>3$ não existe número TOP.

Sendo assim, o total de números TOP que começam com 9 é $1+55+55+1=112$.

a) As páginas pares do álbum têm os números 2, 4, 6, ..., 60 num total de 60 ÷ 2 = 30 páginas e as páginas ímpares têm os números 3, 5, ..., 61. Como existe uma página ímpar ao lado de cada página par, então o número de páginas ímpares também é 30. Portanto, o número total de figurinhas que devem ser coladas no álbum é

$$30 \times 5 + 30 \times 6 = 150 + 180 = 330$$

b) Para cada conjunto de duas páginas, uma par e outra ímpar, como mostrado na ilustração, são coladas 5 + 6 = 11 figurinhas. Por exemplo, nas páginas 2 e 3, colamos 11 figurinhas, nas páginas 4 e 5 também são coladas 11 figurinhas etc. Assim, dividindo 196 por 11, podemos localizar o conjunto de duas páginas onde deve ser colada a figurinha 196 e a posição dessa figurinha nesse conjunto de páginas. O quociente da divisão de 196 por 11 é 17 e o resto é 9. Assim, a figurinha 196 está no 18º conjunto de páginas, ou seja, nas páginas 36 e 37, e na 9ª posição dentre as 11 figurinhas aí coladas. Como 5 figurinhas devem ser coladas na página par, a figurinha de número 196 deve ser colada na página ímpar, ou seja, na página 37.

c) Joãozinho comprou 330 figurinhas que foram coladas e 8 vezes 330 figurinhas que vieram repetidas. Portanto, ele comprou 9 x 330 = 2970 figurinhas, num total de 2970 ÷ 5 = 594 pacotes. Como cada pacote custou 2 reais, foram gastos 594 x 2 = 1188 reais na compra das figurinhas. Como o álbum custou 20 reais, Joãozinho gastou ao todo 20 + 1188 = 1208 reais para ter seu álbum completo.