ALTERNATIVA A

Para obter $f(3)$, façamos $\frac{2x+1}{x-1} = 3$. Obtemos, assim, $2x + 1 = 3\,(x - 1)$, ou seja, $x = 4$. Portanto,

$$f(3) = \frac{1}{4}$$

ALTERNATIVA E

Observando que AAA = A × 111 = A × 3 × 37 , temos as seguintes possibilidades:

A = 1. Não serve pois teríamos, obrigatoriamente, AB = 37 e o primeiro dos A´s na conta seria 3 e não 1.

A = 2. Não serve pois teríamos AB = 37 com B = 6 ou AB = 74 com B = 3. Nos dois casos, olhando para o primeiro dos A's na conta, teríamos A ≠ 2.

A = 3. Serve pois AB seria 37 e, consequentemente, A = 3 , B =7 e C = 9.

A = 4. Não serve, AB seria 74 e C = 6, ou seja, o primeiro A da conta seria 7 ≠ 4.

A = 5. Não serve, pois teríamos C com 2 algarismos ou AB com 3 algarismos.

A = 6. Não serve, AB seria 74 e C = 9, ou seja, o primeiro A da conta seria 7 ≠ 6.

A > 6. Não serve, pois teríamos C com 2 algarismos ou AB com 3 algarismos.

Logo, C = 9.

ALTERNATIVA E

Vamos usar as letras *p*, *c* e *s* para denotar o preço (em reais) de um pão de queijo, de um cachorro-quente e de um suco de laranja, respectivamente. O enunciado nos diz que $p + 2c + s = 31$ e $3p + 3c + 2s = 59$. Multiplicando a primeira expressão por 2 e subtraindo do resultado, pois, assim, a segunda expressão, obtemos

$$2(p + 2c + s) - (3p + 3c + 2s) = c - p$$

e, por outro lado,

$$2(p + 2c + s) - (3p + 3c + 2s) = 2 \cdot 31 - 59 = 3$$

ou seja, $c - p = 3$.

Vamos a outra solução; ao contrário da anterior, onde o $c - p$ apareceu "por acaso", nessa vamos sistematicamente em busca de $c - p$, escrevendo

$$31 = p + 2c + s = 2(c - p) + 3p + s$$

e

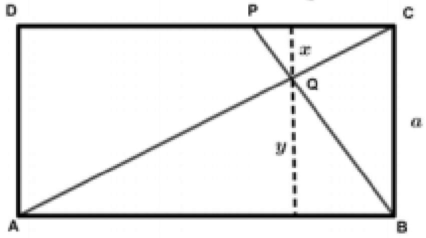
$$59 = 3p + 3c + 2s = 3(c - p) + 6p + 2s.$$

Observando essas expressões, notamos que o $6p + 2s$ da segunda é duas vezes o $3p + s$ da primeira, o que sugere multiplicar a primeira expressão por 2 e subtrair a segunda do resultado, pois assim os termos em *p* e *s* desaparecem, restando apenas um termo em $c - p$. Temos então

$$2 \cdot 31 - 59 = [4(c - p) + 6p + 2s] - [3(c - p) + 6p + 2s] = c - p$$

ou seja, temos $c - p = 3$ como antes.

ALTERNATIVA A



A medidas dos segmentos *BC* e *CP* são denotadas, respectivamente, por a e b, e x e y denotam as medidas das alturas dos triângulos *PQC* e *ABQ*, respectivamente. A área do triângulo *BCP* é 8, assim $\frac{a \cdot b}{2} = 8$; portanto $b = 16/a$. Além disso, temos as relações:

- $\frac{16}{a} \cdot \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$
- $y = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$

Por outro lado, os triângulos *ABQ* e *PQC* são semelhantes (por terem seus ângulos internos iguais) com razão de semelhança $\frac{y}{x} = 3$, o que implica na igualdade

$área(ABQ) = 9 \times área(PQC) = 18.$

Portanto, $área(ABCD) = 2 \times (18 + 6) = 48.$

ALTERNATIVA C

Chamemos de L o comprimento da pista. Como a velocidade de Ana é o dobro da de Beatriz, quando elas se encontram, Ana terá percorrido 2L/3, e Beatriz L/3.

Para que isso fique mais claro, basta observar que, em um mesmo intervalo de tempo, a distância percorrida por Ana é o dobro da distância percorrida por Beatriz. Assim, quando as duas se encontram, as distâncias percorridas estarão nessa mesma proporção 2:1, e Ana terá percorrido, portanto, 2L/3.

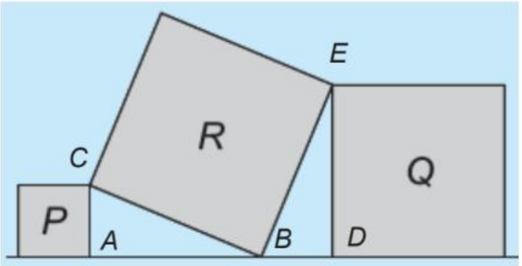
Um raciocínio análogo mostra que, quando Ana se encontra com Cristina, Ana terá percorrido o triplo de Cristina, pois a velocidade de Ana é o triplo da velocidade de Cristina. Assim, Ana terá percorrido 3L/4 e Cristina, L/4.

Como a distância percorrida por Ana entre os dois encontros é de 20 metros, temos (3L/4) – (2L/3) = 20, ou seja, L = 240 metros.

ALTERNATIVA D

Primeiramente observe que os triângulos *ABC* e *DEB* são congruentes e, portanto, o segmento *AB* tem a mesma medida do lado *DE* do triângulo ***Q***. Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos que área de ***R*** = área de ***P*** + área de ***Q***.

Portanto, a área de ***Q*** é 168 – 24 = 144 cm^2.



ALTERNATIVA B

Há 15 possibilidades de escolhas de uma bola da primeira caixa juntamente com uma bola da segunda caixa. Dessas 15 escolhas duplas (uma bola de cada caixa), somente 3 repetem a mesma letra. Logo, a probabilidade das duas bolas terem a mesma letra é 3/15= 1/5.

OUTRA SOLUÇÃO:

Basta olhar para as bolas na ordem inversa do sorteio, ou seja, olhe para a segunda bola primeiro. Os 3 resultados são bons para a sua intenção. Agora olhe para a primeira bola sorteada: apenas um dos 5 resultados são favoráveis a sua intenção, portanto, a probabilidade desejada é 1/5.

ALTERNATIVA D

Considerando somente as unidades em ambos os lados da igualdade $(EU)^2$ = MEU, observamos que U^2 termina com o algarismo U. Isso só acontece com os algarismos 1,5 ou 6. Logo, a letra U deve ser um desses algarismos. Como $31^2 = 961$ e $32^2 = 1024$, e considerando que $(EU)^2$ é igual ao número MEU de três algarismos, segue que o número EU deve ser maior do que 10 e menor do que 32. Além disso, E e U são algarismos diferentes e não nulos. Assim, as possibilidades para o número EU são: 15, 16, 21, 25, 26 e 31. Testando essas possibilidades, como feito abaixo, segue que a única correta é $25^2 = 625$.

- $15^2 = 225$
- $16^2 = 256$
- $21^2 = 441$
- $25^2 = 625$
- $26^2 = 676$
- $31^2 = 961$

Logo, MEU representa o número 625 e $M + E + U = 13$.

ALTERNATIVA E

Como $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=\frac{7}{12}$, então $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+2xy}=\frac{7}{12}$. Logo, $\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}=\frac{12}{7}$

Portanto $1+\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{12}{7}$, de onde se conclui que $\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{5}{14}$. Deste modo, $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{14}{5}$ e, finalmente, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{14}{5}=2{,}8$.

ALTERNATIVA B

Na roleta das centenas, a probabilidade de a seta parar no setor marcado com o número 3 é de 1/2, e a probabilidade de a seta parar no setor marcado com os números 1 ou 2 é de 1/4 para cada um deles. Na roleta das dezenas, a probabilidade de a seta parar num dos setores marcados com os números 1, 3, 4, 5 e 8 é de 1/5 para cada um deles. O número determinado pelas setas, depois de giradas, é maior que 260 quando acontece alguma das situações seguintes:

- A seta da roleta das centenas para no setor marcado com 3, o que acontece com probabilidade 1/2. Não importa o que ocorre nas casas das dezenas e das unidades.
- A seta da roleta das centenas para no setor marcado com 2 e a seta do setor das dezenas para no setor marcado com 8, o que acontece com probabilidade (1/4) x (1/5). Não importa o que ocorre na casa das unidades.

Assim, a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260 é

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}$$

o que representa uma porcentagem de 50% + 5% = 55% de probabilidade.

ALTERNATIVA E

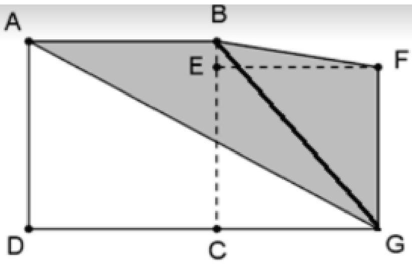
Sendo x a distância percorrida com as duas juntas e y a distância percorrida apenas por Talia, fica claro que Isabel deve pagar pela distância x e Talia pela distância $x+y$. Como os pagamentos são proporcionais a essas distâncias, a fração correspondente a Isabel é $\frac{x}{x+(x+y)}=\frac{x}{2x+y}$. Seja p o preço por quilômetro rodado. Então

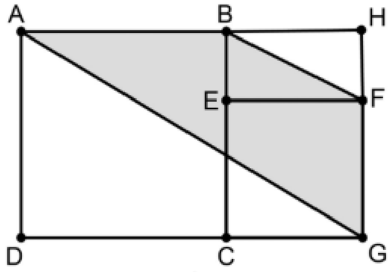
$$\begin{vmatrix}4+px=28\\4+px+py=44\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}px=28-4=24\\4+24+py=44\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}px=24\\py=44-4-24=16\end{vmatrix}$$

Portanto, Isabel deve pagar $\frac{x}{2x+y}=\frac{\frac{24}{p}}{2\cdot\frac{24}{p}+\frac{16}{p}}=\frac{24}{48+16}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$ do valor total, ou seja, Talia deve receber de Isabel $\frac{3}{8}\cdot 44=$ R\$ 16,50. Observe que não foi necessário conhecer o valor de p.

ALTERNATIVA A

O lado do quadrado maior é $\sqrt{R}$ e o lado do menor $\sqrt{S}$. Traçamos o segmento *BG* e vemos que ele divide a região cinza em dois triângulos *ABG* e *BFG*, cujas áreas, somadas, dão a área da região cinza. A área do triângulo *ABG* é $\frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R}}{2}=\frac{R}{2}$ e a área do triângulo *BFG* é $\frac{\sqrt{S}\cdot\sqrt{S}}{2}=\frac{S}{2}$. Logo, a área da região cinza é $\frac{R+S}{2}$.





Outra solução:

Construímos o triângulo *BFH* congruente ao triângulo *BEF* e denotamos por *X* a área de cada um deles. Se a área da região cinza é *Y* observamos que

$$Y+X=\frac{A(ADGH)}{2}=\frac{R+S+2X}{2}=\frac{R+S}{2}+X,$$

de onde concluímos que $Y=\frac{R+S}{2}$.

ALTERNATIVA D

De acordo com a maneira com que João reduza a quantidade de copos da fila,

- após a 1.ª etapa teremos $\frac{148}{2}=74$ copos na fila;
- após a 2.ª etapa teremos $\frac{74}{2}=37$ copos na fila;
- após a 3.ª etapa teremos $\frac{37+1}{2}=19$ copos na fila;
- após a 4.ª etapa teremos $\frac{19+1}{2}=10$ copos na fila;
- após a 5.ª etapa teremos $\frac{10}{2}=5$ copos na fila;
- após a 6.ª etapa teremos $\frac{5+1}{2}=3$ copos na fila;
- após a 7.ª etapa teremos $\frac{3+1}{2}=2$ copos na fila.

Em cada etapa, a quantidade de feijões no segundo copo sempre dobra. Assim, após a 7.ª etapa, a quantidade de feijões no segundo copo será $2^7=128$. Todos os demais feijões estarão no primeiro copo. Portanto, a quantidade de feijões no primeiro copo quando a fila se reduz a dois copos é $148-128=20$.

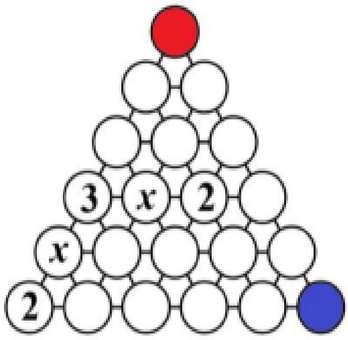
Temos

$$\begin{aligned}63 &= x^2y+xy^2+x+y\\ &= xy(x+y)+(x+y)\\ &= 6(x+y)+(x+y)\\ &= 7(x+y).\end{aligned}$$

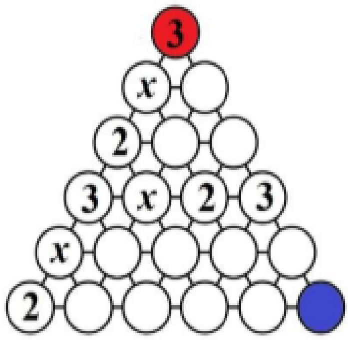
Portanto, $x+y=9$. Assim,

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy\\ &= 81-12\\ &= 69.\end{aligned}$$

a) De acordo com o enunciado, a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos é sempre a mesma. Assim, olhando para a figura abaixo, vemos que será escrito o mesmo número, que denotaremos por x, nos dois círculos entre os círculos em que estão escritos os números 2 e 3.

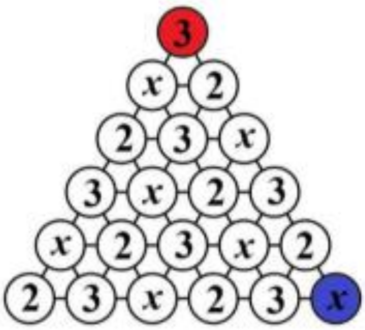


Além disso, se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x, sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo. Desta forma, é possível completar a escrita dos números em todos os círculos que estão alinhados com os círculos em que estão escritos 2, 3 e x, como abaixo:



Logo, deverá ser escrito o número 3 no círculo vermelho. Isto responde o item a).

b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, "se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x, sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo", podemos completar a escrita em todos os círculos da figura, como abaixo:



Logo, ao final, serão escritos sete números 2, sete números 3 e sete números x. Assim, a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

c) No preenchimento completo que fizemos acima, vemos que no círculo azul será escrito o número x e, para que a soma de todos os números escritos seja 63, o valor de x deve ser

$$\frac{63-7\times2-7\times3}{7}=\frac{63-14-21}{7}=\frac{28}{7}=4.$$