GABARITO LISTA DE TREINAMENTO NÍVEL 3

OMOC

QUESTÃO 1:

Julia treina em uma pista de 3 km. Ela percorre o primeiro quilômetro caminhando, o segundo correndo, e o terceiro em bicicleta. Se ela tivesse percorrido toda a pista em bicicleta, haveria demorado 10 minutos a menos. Julia corre ao dobro da velocidade com que caminha, e vai em bicicleta ao triplo da velocidade com que caminha. Quanto tempo Julia leva para correr 1 km?

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 12

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA C

Seja t o tempo, em minutos, que Julia leva para caminhar 1 km. Como ela corre o dobro da velocidade em que caminha, então ela leva $\frac{t}{2}$ minutos para correr um quilômetro. Além disso, como ela vai de bicicleta o triplo da velocidade com que caminha, então leva $\frac{t}{3}$ minutos para percorrer um quilômetro de bicicleta. Assim, Julia levou $t+\frac{t}{2}+\frac{t}{3}=\frac{11t}{6}$ minutos para percorrer os 3 quilômetros da pista.

Se Julia tivesse percorrido os três quilômetros da pista de bicicleta, ela teria demorado $3\times\frac{t}{3}=t$ minutos. Conforme o enunciado do problema, ela leva 10 minutos a menos para percorrer todo o percurso de bicicleta. Dessa forma, temos a seguinte expressão:

$$\frac{11t}{6}-10 = t$$

Resolvendo a equação, obtemos t = 12 minutos. Substituindo esse valor na fração $\frac{t}{2}$, temos que Julia leva 6 minutos para correr 1 km da pista.

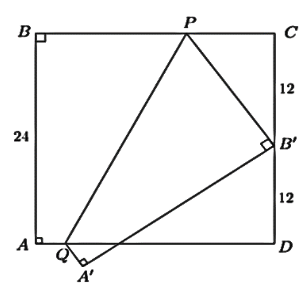
QUESTÃO 2:

Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de papel, de lado 24, que foi dobrado ao longo do segmento *PQ*, de modo que o vértice B foi levado até o ponto médio do segmento *CD*. Qual o comprimento do segmento *PC*?

a) 3

b) 4

c) 6



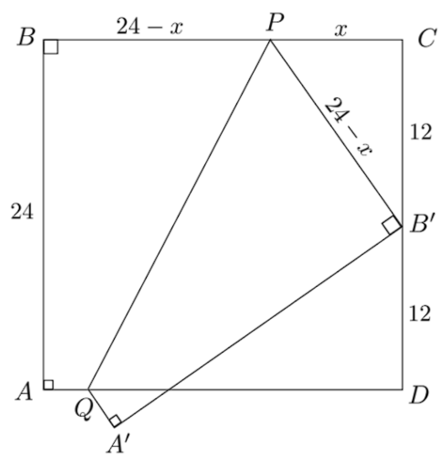
d) 7

e) 9

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA E

Chamemos x o comprimento do segmento PC. Como o lado do quadrado mede 24, então PB = 24 − x e também PB’ = 24 − x.



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo PCB’, temos que:

$$x^2 + 122 = (24 - x)2 \Longrightarrow x^2 + 144 = 576 - 48x + x^2 \Longrightarrow 48x = 576 - 144 \Longrightarrow x = 432 \div 48 \Longrightarrow x = 9$$

Assim, mostramos que $PC = 9$.

QUESTÃO 3:

Papai Noel chegou à casa de Arnaldo e Bernaldo carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles: "o brinquedo número 1 é para você, Arnaldo e o brinquedo número 2 é para você, Bernardo. Mas esse ano, vocês podem escolher ficar com mais brinquedos contanto que deixem ao menos um para mim". De quantos modos Arnaldo e Bernaldo podem dividir entre eles o restante dos brinquedos?

a) $8 + 2^7$

b) 2^8

c) $3^8 – 2^8$

d) 3^8

e) 8^3

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA C

Para cada um dos 8 brinquedos restantes devemos decidir se ele vai pertencer a Arnaldo, a Bernaldo ou deve ser deixado para Papai Noel. Dessa forma, temos para cada brinquedo 3 possibilidades de destino. Logo, há 3^8 formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo, a Bernaldo e Papai Noel, incluindo os casos em que Papai Noel fica sem nenhum brinquedo. Restará então contar o número de formas de dividir todos os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo (sem deixar nada para Papai Noel), e subtrair esse número de 3^8.

Para dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo devemos decidir, por cada um dos 8 brinquedos, para qual dos dois o brinquedo vai, o que nos dá 2 possibilidades de destino para cada brinquedo. Assim temos 2^8 formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo.

Finalmente a resposta é $3^8 - 2^8$ formas de dividir os brinquedos de modo que o Papai Noel fique com pelo menos um.

QUESTÃO 4:

Em um torneio de xadrez, todos os jogadores enfrentaram todos os outros exatamente uma vez. Em cada partida, o jogador ganha 1 ponto se vencer, 1/2 se empatar e 0 ponto se perder. Ao final do torneio, um repórter somou as pontuações de todos os jogadores e obteve 190 pontos. Quantos jogadores participaram do torneio?

a) 8 b) 10 c) 15 d) 18 e) 20

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA E

Seja J o número de jogadores. Cada partida vale no total 1 ponto, seja 1 + 0 = 1 ou 1/2+1/2 = 1. Então a pontuação total é igual ao número de partidas. Como cada um dos J jogadores enfrenta cada um dos outros $J - 1$ jogadores, poderíamos pensar que o total de jogos seria $J(J-1)$ embates. Entretanto, cada partida acaba sendo contada duas vezes e, portanto, o total de partidas é $\frac{J(J-1)}{2}$. Usando o número obtido pelo jornalista, temos

$$\begin{aligned} \frac{J(J-1)}{2} &= 190 \\ J(J-1) &= 380 \\ &= 20 \cdot 19. \end{aligned}$$

Daí, $J = 20$

QUESTÃO 5:

Um cientista maluco criou três estranhas máquinas. A máquina *A* transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{1}{3}$. A máquina *B* transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{2}{5}$. A máquina *C* transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{1}{4}$. E se o animal é um cachorro, nenhuma das máquinas faz transformação alguma.

O cientista colocou um gato na máquina *A*, depois colocou o animal resultante da máquina *A* na máquina *B* e, por fim, colocou o animal resultante da máquina *B* na máquina *C*. Qual a probabilidade de ter saído um cachorro da máquina *C*?

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{59}{60}$

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA C

Primeiro, vamos calcular a probabilidade de um gato sair gato de cada máquina.

Como a probabilidade de sair um cachorro da máquina *A* é $\frac{1}{3}$, a probabilidade de sair um gato desta máquina é $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Como a probabilidade de sair um cachorro da máquina *B* é $\frac{2}{5}$, a probabilidade de sair um gato desta máquina é $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Como a probabilidade de sair um cachorro da máquina *C* é $\frac{1}{4}$, a probabilidade de sair um gato desta máquina é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Para que um gato saia gato depois de passar pelas três máquinas, é necessário que ele saia gato de cada uma delas, pois uma vez cachorro, nenhuma máquina o transforma de volta em gato. Logo, a probabilidade do gato sair gato depois de passar pelas três máquinas é o produto das três probabilidades:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

A probabilidade que este gato saia cachorro depois de passar pelas três máquinas é um menos a probabilidade de que ele saia gato depois de passar pelas três máquinas. Como

$$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

A resposta final é $\frac{7}{10}$.

QUESTÃO 6:

Seja ABCD um quadrado de lado 28cm. Seja *P* um ponto interior ao quadrado e *E* um ponto no lado CD tal que PE é perpendicular a CD. Além disso, AP = BP = PE. Encontre o comprimento de AP.

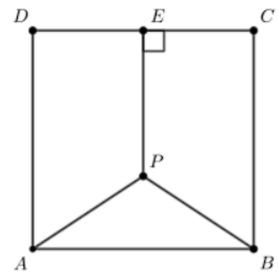
a) 12

b) 14,5

c) 15

d) 17,5

e) 19

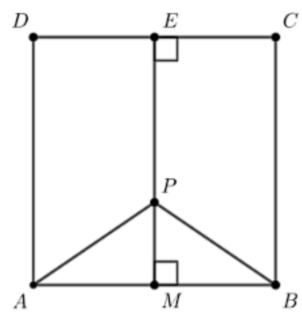


SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA D

Seja M o ponto de interseção da reta *EP* com o lado *AB*. Como *EP* é perpendicular a *CD*, então *EM* é perpendicular a *AB*. Além disso, como o triângulo *ABP* é isóscele, *M* é o ponto médio de *AB*. Se o comprimento de *AP* é *x*, segue do Teorema de Pitágoras que:

$$\begin{aligned} AP^2 &= AM^2 + PM^2 \\ x^2 &= 14^2 + (28-x)^2 \\ x^2 &= 196 + 784 - 56x + x^2 \\ 56x &= 980 \\ x &= 17{,}5\,cm \end{aligned}$$



QUESTÃO 7:

Cinco peças de metal, confeccionadas, respectivamente, de ouro, prata, bronze, platina e níquel, foram colocadas em 5 cofres numerados de 1 a 5, de forma que cada cofre contenha uma peça. Na porta de cada cofre está escrita uma informação. Das 5 informações, 4 são falsas e a única que é verdadeira é aquela na porta do cofre que contém a peça de ouro. Veja as informações:

Cofre 1: O ouro está no cofre 2 ou 3.

Cofre 2: A prata está no cofre 1.

Cofre 3: O bronze não está aqui.

Cofre 4: O níquel está no cofre cujo número é inferior de 1 ao que contém o ouro.

Cofre 5: A platina está no cofre cujo número é superior de 1 ao que contém o bronze.

Em qual cofre está a platina?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA D

A primeira informação é certamente falsa, pois se fosse verdadeira, o ouro estaria no Cofre 2 ou 3, mas deveria estar no Cofre 1. Logo o ouro não está nem no Cofre 2 nem no Cofre 3. A segunda informação não pode estar correta, pois, caso contrário, o ouro estaria no Cofre 2, o que é incorreto. Logo, 1 e 2 são falsas. Portanto, o ouro não está no Cofre 1, nem no 2 nem no 3, e a prata não está no Cofre 1.

Portanto, temos as seguintes possibilidades:

a) $\underbrace{\text{—}}_{1}, \underbrace{\text{—}}_{2}, \underbrace{\text{—}}_{3}, \underbrace{\text{ouro}}_{4}, \underbrace{\text{—}}_{5}.$

Nessa possibilidade, a informação 4 seria correta e o níquel estaria no Cofre 3. Sendo a informação em 3 falsa, deveríamos ter o bronze também no cofre 3. Logo essa possibilidade fica descartada.

b) $\underbrace{\text{—}}_{1}, \underbrace{\text{—}}_{2}, \underbrace{\text{—}}_{3}, \underbrace{\text{—}}_{4}, \underbrace{\text{ouro}}_{5}.$

Nessa possibilidade, a informação 5 seria correta e a platina estaria no Cofre cujo número é superior de 1 ao que contém o bronze. Pela afirmação do Cofre 3, que é falsa, teríamos o bronze no cofre 3, logo a platina estaria no cofre 4. Sendo a afirmação 2 falsa, a prata não está no Cofre 1, só podendo estar no Cofre 2. Portanto temos a seguinte solução:

$$\underbrace{\text{níquel}}_{1}, \underbrace{\text{prata}}_{2}, \underbrace{\text{bronze}}_{3}, \underbrace{\text{platina}}_{4}, \underbrace{\text{ouro}}_{5}.$$

QUESTÃO 8:

Seja $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10}=5$. Qual o valor de *x*, sendo *x* pertencente aos números reais?

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{11}{3}$ d) 4 e) $\frac{13}{3}$

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA A

Podemos eliminar radicais elevando membros da equação abaixo ao quadrado:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10} &= 5\\
(\sqrt{x^2-6x+10})^2 &= (5-\sqrt{x^2+9})^2\\
x^2-6x+10 &= 25-10\sqrt{x^2+9}+x^2+9\\
10\sqrt{x^2+9} &= 6x+24\\
25(x^2+9) &= (3x+12)^2\\
25x^2+225 &= 9x^2+72x+144\\
16x^2-72x+81 &= 0\\
(4x-9)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $4x-9=0$, ou seja $x=\frac{9}{4}$. Para verificar que $x=\frac{9}{4}$ é a solução, basta escrever

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10} &= \sqrt{\frac{81}{16}+9}+\sqrt{\frac{81}{16}-6\cdot\frac{9}{4}+10}\\
&= \frac{15}{4}+\frac{5}{4}\\
&= 5.
\end{aligned}$$

QUESTÃO 9:

Três casais fizeram compras em uma livraria. Vitor comprou 3 livros a mais do que Lorena e Pedro comprou 5 livros a mais do que Cláudia. Cada um dos homens comprou 4 livros a mais do que cada respectiva esposa. Lorena e Claudia compraram mais livros do que Bianca, que só comprou 3 livros. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) Vitor comprou mais livros do que Pedro.

b) Pedro é marido de Cláudia

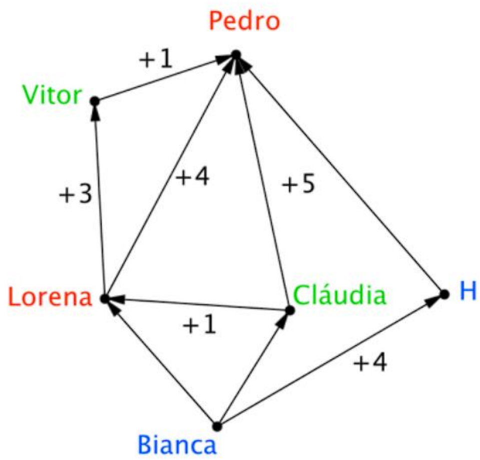
c) Pedro foi o marido que comprou o maior número de livros.

d) Cláudia comprou um livro a mais do que Lorena.

e) Vitor é marido de Bianca.

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA C



Vamos representar as informações do enunciado no diagrama ao lado. Nele, a letra H indica o único homem cujo nome não aparece no enunciado. A flecha que vai de Cláudia a Pedro, indicada com +5, quer dizer que Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, e analogamente para as outras flechas. As flechas que saem de Bianca para Lorena e Cláudia indicam que ambas compraram mais livros que Bianca. Mais abaixo vamos explicar as flechas que não correspondem a dados do enunciado.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e cada homem comprou 4 livros a mais que sua esposa, segue que Pedro não é o marido de Cláudia. Por outro lado, Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, que comprou mais livros que Bianca; logo Pedro não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Lorena. Indicamos essa conclusão no diagrama colocando os nomes de Pedro e Lorena em vermelho e marcando a flecha que os liga com +4.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e 4 livros a mais que Lorena, segue que Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia, o que nos dá a flecha que liga Cláudia a Lorena. As flechas que ligam Cláudia a Vítor passando por Lorena mostram que Vítor comprou 4 livros a mais que Cláudia; como Cláudia comprou mais livros que Bianca, segue que Vítor comprou pelo menos 5 livros a mais que Bianca. Logo Vítor não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Cláudia; indicamos essa conclusão colocando seus nomes em verde. Logo Bianca é a mulher de H; assim, ligamos esses dois por uma flecha com +4 e colocamos seus nomes em azul.

Notamos ainda que Pedro comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca; como H comprou 4 livros a mais que Bianca, segue que Pedro comprou mais livros que H. Finalmente, observamos que como Pedro comprou 4 livros a mais que Lorena e Vítor comprou 3 livros a mais que Lorena, segue que Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor, conforme indicado. Podemos agora analisar as alternativas:

a) Falsa, pois Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor.

b) Falsa, pois Pedro é o marido de Lorena.

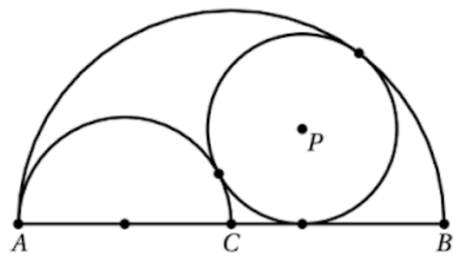
c) Verdadeira, pois Pedro comprou mais livros que Vítor e que H.

d) Falsa, pois Lorena comprou um livro a mais que Cláudia.

e) Falsa, pois Vitor é marido de Cláudia.

QUESTÃO 10:

A figura a seguir mostra um segmento AB, seu ponto médio C e as semicircunferências de diâmetros AB e AC. Uma circunferência de centro P é tangente às duas semicircunferências e também ao segmento AB. Sendo AB = 8cm, e O, o ponto médio de AC, qual é a medida do perímetro do triângulo OCP?



a) 6

b) 8

c) 9

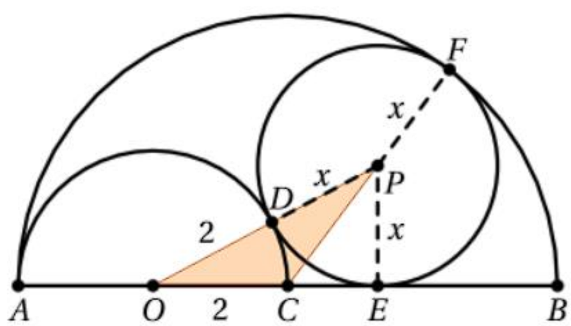
d) 11

e) 12

SOLUÇÃO:

ALTERNATIVA B

Seja x o raio da circunferência de centro P. Traçamos OP, que passa pelo ponto de tangência D; CP, que passa pelo ponto de tangência F; e PE, perpendicular a AB (e raio da circunferência destacada na figura).



Temos $CP = 4 - x$ e $OP = 2+x$. Logo, o perímetro do triângulo OCP é

$$\begin{aligned} 2p &= OP + CP + CO \\ &= (2+x) + (4-x) + 2 \\ &= 8 \text{ cm}. \end{aligned}$$