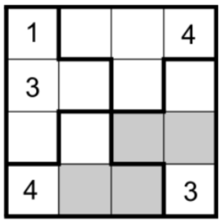
SEGUNDA LISTA DE TREINAMENTO NÍVEL III

OMOC

Questão 1:

Os quadradinhos do tabuleiro da figura devem ser preenchidos de modo que:

- Nos quadradinhos de cada uma das regiões em forma de aparecam os números 1, 3, 5 e 7 ou os números 2, 4, 6 e 8;
- Em quadradinhos com um lado comum não apareçam números consecutivos.



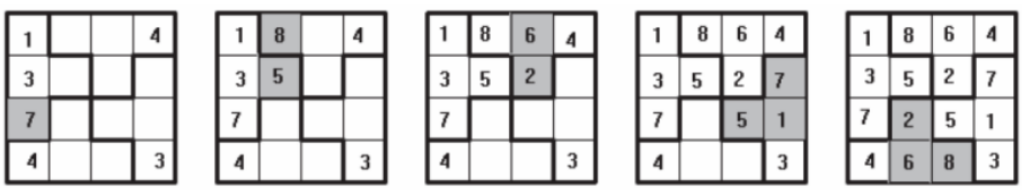
Qual é a soma dos números que vão aparecer nos quadradinhos cinzas?

a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

Solução:

ALTERNATIVA E

Uma maneira de preencher a tabela de acordo com as condições do enunciado é dada abaixo. Em cada etapa, indicamos com a cor cinza as novas casas preenchidas. Notamos que a tabela final é única, independentemente do modo com que ela é preenchida.



Logo, vemos que a soma dos números nos quadradinhos cinzas marcados no desenho desse enunciado é igual a 6 + 8 + 5 + 1 = 20.

Questão 2:

Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{4}$

Solução:

ALTERNATIVA C

As amigas podem escolher suas blusas, sem restrição, de 3× 3 ×3 = 27 maneiras diferentes. Por outro lado, se elas devem escolher blusas sem repetição de cores e uma delas já escolheu a sua entre as 3 possibilidades, uma outra terá apenas 2 possibilidades e a última apenas 1, num total de 3×2×1= 6 possibilidades sem repetição de cores. Logo a probabilidade em questão é igual a $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Questão 3:

Alberto, Bernardo e Carlos disputaram uma corrida, na qual cada um deles correu com velocidade constante durante todo o percurso. Quando Alberto cruzou a linha de chegada, Bernardo e Carlos estavam 36 e 46 metros atrás dele, respectivamente. Quando Bernardo cruzou a linha de chegada, Carlos estava 16 metros atrás dele. Qual é o comprimento da pista?

a) 96m b) 100m c) 120m d) 136m e) 144m

Solução:

ALTERNATIVA A

Seja x o comprimento em metros da pista. A distância entre Bernardo e Carlos era de 10 metros quando Alberto cruzou a linha de chegada, e era de 16 metros quando Bernardo cruzou a linha de chegada. Vemos assim que, durante o intervalo de tempo no qual Alberto e Bernardo completaram a corrida, Bernardo correu 36 metros enquanto Carlos correu 30; logo

$$\frac{\text{velocidade de Carlos}}{\text{velocidade de Bernardo}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

Como Bernardo cruzou a linha de chegada 16 metros à frente de Carlos, temos a equação $\frac{5}{6} = \frac{x-16}{x}$, cuja solução é $x = 96$.

Questão 4:

Em um quadro, representado na figura abaixo, Elisa brinca de escrever os algarismos de 0 até 9 em uma linha, na ordem que ela escolher. Na linha debaixo ela junta os vizinhos, formando nove números novos, e soma esses números como no exemplo:

2		1		3		7		4		9		5		8		0		6
	21		13		37		74		49		95		58		80		06	
21 + 13 + 37 + 74 + 95 + 58 + 80 + 6 = 433																		

Qual é a maior soma que é possível obter desse modo?

a) 506 b) 494 c) 469 d) 447 e) 432

Solução:

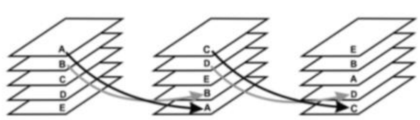
ALTERNATIVA B

Para qualquer disposição dos algarismos, a soma dos vizinhos "juntados" terá sempre nove parcelas, sem repetição de algarismos nas unidades ou nas dezenas. O único algarismo que não aparece nas unidades é o primeiro e o único que não aparece nas dezenas é o último. Para que a soma seja máxima, o algarismo 0 não deve comparecer nas dezenas e, portanto, deve ser o último; além disso, o menor dos algarismos $1, 2, \ldots, 9$ não deve aparecer nas unidades e, portanto, o 1 deve ser o primeiro.

Concluímos que a soma é máxima para qualquer escolha onde 1 é o primeiro algarismo e 0 o último. Nesse caso, a soma das unidades será $0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$ e a soma das dezenas será $10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 450$; a soma máxima é então $450 + 44 = 494$.

Questão 5:

Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas.



Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

a) A b) B c) C d) D e) E

Solução:

ALTERNATIVA E

O leitor pode verificar que, se Estefânia embaralhar as cartas 6 vezes, elas voltarão à posição inicial. Como $74 = 12 \times 6 + 2$, embaralhar as cartas 74 vezes tem o mesmo efeito que fazê-lo duas vezes, o que deixa a carta E no topo da pilha

Questão 6:

O número $abcde$ tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras a, b, c, d, e. Multiplicando-se este número por 4 obtém-se um número de cinco algarismos $edcba$. Qual o valor de $a + b + c + d + e$?

a) 22 b) 23 c) 24 d) 25 e) 27

Solução:

ALTERNATIVA E

A multiplicação pode ser esquematizada como

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & a \end{array}$$

A solução é baseada nas seguintes observações:

• O algarismo a só pode ser 1 ou 2, pois, se fosse $a \geq 3$, então 4a seria um número de 2 algarismos e, portanto, o número $edcba$ teria 6 algarismos. Mas a não pode ser 1 pois $edcba$, sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo $a = 2$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & 2 \end{array}$$

• O algarismo b só pode ser 1 ou 2, pois $4 \times b$ tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $b = 1$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & b & 2 \end{array}$$

• O algarismo d só pode ser 2 ou 7, pois $4 \times d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos só podemos ter $d = 7$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & c & 1 & 2 \end{array}$$

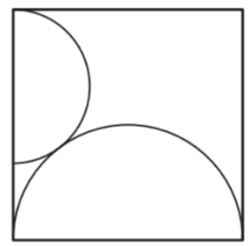
• O algarismo c só pode ser 9, pois $4c + 3$ é um número terminado em c.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 9\ 7\ 8 \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline 8\ 7\ 9\ 1\ 2 \end{array}$$

Logo, a resposta é $8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27$.

Questão 7:

Na figura, os dois semicírculos são tangentes e o lado do quadrado mede 36 cm. Qual é o raio do semicírculo menor?



a) 8 cm

b) 9 cm

c) 10 cm

d) 11 cm

e) 12 cm

Solução:

ALTERNATIVA E

Sejam R e r os raios dos semicírculos maior e menor, respectivamente; o lado do quadrado tem então medida $2R = 36$, ou seja, $R = 18$. Como os centros dos semicírculos e o ponto de tangência estão alinhados, o triângulo destacado na figura é um triângulo retângulo de catetos R e $2R - r$ e hipotenusa R + r. O teorema de Pitágoras nos dá $(R + r)2 = R2 + (2R – r)2$. Simplificando, obtemos $6Rr = 4R$ segue que $r = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 18 = 12\ cm$.

Questão 8:

Para chegar à universidade, um estudante utiliza um metrô e, depois, tem duas opções:

- Seguir num ônibus, percorrendo 2,0 km;
- Alugar uma bicicleta, ao lado da estação do metrô, seguindo 3,0 km pela ciclovia.

O quadro fornece as velocidades médias do ônibus e da bicicleta, em km/h, no trajeto metrô-universidade.

Dia da semana	**Velocidade média (km/hr)**	
	Ônibus	**Bicicleta**
Segunda-Feira	9	15
terça-feira	20	22
quarta-feira	15	24
quinta-feira	12	15
sexta-feira	10	18
sábado	30	16

A fim de poupar tempo no deslocamento para a universidade, em quais dias o aluno deve seguir pela ciclovia?

a) Às segundas, quintas e sextas-feiras.
b) Às terças e quintas-feiras e aos sábados.
c) Às segundas, quartas e sextas-feiras.
d) Às terças, quartas e sextas-feiras.
e) Às terças e quartas-feiras e aos sábados

Solução:

ALTERNATIVA C

A questão diz que de ônibus é percorrido 2,0 km e de bicicleta é percorrido 3,0 km.

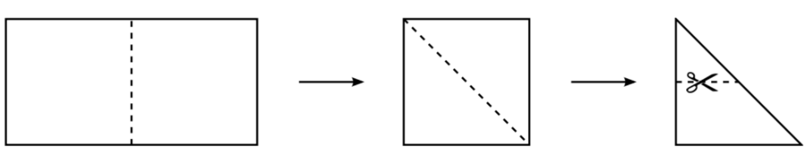
Vamos agora analisar o tempo que o aluno levaria de ônibus e de bicicleta em cada dia da semana. Para isso, vamos dividir a velocidade média por tempo que é percorrido de ônibus (2km) e de bicicleta (3 km).

Dia da semana	**Tempo de ônibus**	**Tempo de bicicleta**
Segunda-Feira	2 ÷ 9 = 0,22	3 ÷ 15 = 0,2
terça-feira	2 ÷ 20 = 0,1	3 ÷ 22 = 0,13
quarta-feira	2 ÷ 15 = 0,13	3 ÷ 24 = 0,12
quinta-feira	2 ÷ 12 = 0,16	3 ÷ 15 = 0,2
sexta-feira	2 ÷ 10 = 0,2	3 ÷ 18 = 0,16
sábado	2 ÷ 30 = 0,06	3 ÷ 16 = 0,18

Podemos ver que os únicos dias em que o tempo de bicicleta é menor do que o de ônibus é na segunda, quarta e sexta. São esses os dias em que o aluno deve seguir pela ciclovia.

Questão 9:

Uma folha de papel é retangular, com base igual a 20 cm e altura 10 cm. Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura abaixo, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.



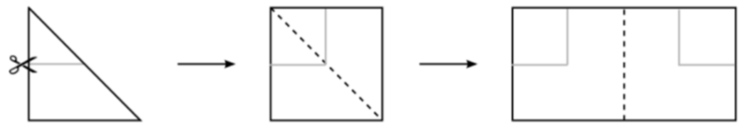
Depois de cortar no local indicado, qual a área da maior parte?

a) 86 cm^2 b) 94 cm^2 c) 112 cm^2 d) 150 cm^2 e) 175 cm^2

Solução:

ALTERNATIVA D

Vamos marcar a linha cortada pela tesoura em cinza, e fazer o processo inverso, que corresponde a abrir a folha depois de cortada:



Como se pode observar, os dois quadrados recortados nos cantos superior esquerdo e inferior direito têm lado igual a 5 cm. Como a área de um quadrado é o lado ao quadrado, a área de cada quadrado é igual $5 \times 5 = 25\, cm^2$. A folha é um retângulo de base 20 cm e altura 10 cm. Logo, como a área de um retângulo é base vezes altura, a área da folha é de $20 \times 10 = 200\, cm^2$. Subtraindo a área total pela área dos dois quadrados nos cantos, concluímos que a área do pedaço maior da folha após o corte pela tesoura é

$$200 - 2 \times 25 = 200 - 50 = 150\, cm2.$$

Questão 10: Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

a) 12654 b) 12740 c) 13124 d) 13210 e) 13320

Solução:

ALTERNATIVA A

Com os números 1, 4, 6 e 8 podem-se formar 4 × 3 × 2 = 24 números de três algarismos distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e por fim 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos 6, 4, 2 e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e 24 ÷ 4 = 6; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como 6×(8 + 6 + 4 + 1) = 114, a soma desses 24 números será 114 +10 ×114 +100 ×114 = 111×114 = 12654.