



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
OMOC – OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE
CADERNO DE SOLUÇÕES MATUTINO – PRIMEIRA FASE
NÍVEL III - ENSINO MÉDIO

Questão 1: Na prova da primeira fase da IV OMOC, houveram 4 mil alunos participantes, sendo que 15% destes alunos passaram para a segunda fase. Dos 15% que passaram para a segunda fase, 5% foram medalhistas de ouro, 10% foram medalhistas de prata, 15% foram medalhistas de bronze e 25% premiados com menções honrosas. Dos alunos aprovados para segunda fase, quantos não foram premiados?

- A) 27 B) 30 C) 270 D) 300 E) 330

Solução: ALTERNATIVA C

O total de alunos que passaram para a segunda fase é $4000 \times 0,15 = 600$ alunos. Destes, $5\% + 10\% + 15\% + 25\% = 55\%$ foram premiados, portanto, 45% não foram premiados. Assim, temos que dos alunos que passaram para a segunda fase, os não premiados foram $600 \times 0,45 = 270$ alunos.

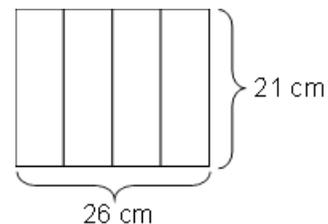
Questão 2: Uma caixa de suco de laranja possui 21 cm de altura e perímetro da base igual a 26 cm. Sabendo-se que a base da caixa é formada por um quadrado, calcule a quantidade de papel necessária, em cm^2 , para confeccionar a caixa, desprezando-se as dobras.

- A) 395,5 B) 480 C) 546 D) 630,5 E) 720,5



Solução: ALTERNATIVA D

Como o perímetro da base é 26 cm, temos que a lateral da caixa é formada por um retângulo de área $26 \times 21 = 546 \text{ cm}^2$, representado na figura ao lado.



Como a base é um quadrado, seu lado é $26 \div 4 = 6,5 \text{ cm}$ e, conseqüentemente, sua área é $6,5 \times 6,5 = 42,25 \text{ cm}^2$. Logo, a quantidade total de papel necessária para confeccionar a caixa é $546 + 2 \times 42,25 = 630,5 \text{ cm}^2$.

Questão 3: Ana, Bianca, Carolina e Denise decidiram se reunir para jogar um jogo de cartas. Nesse jogo, são necessários pelo menos dois jogadores, podendo ser jogado também entre 3 ou 4 pessoas. De quantas formas as quatro amigas podem se organizar para jogar, de modo que a ordem em que elas se posicionam no jogo não importa?

- A) 6 B) 9 C) 11 D) 15 E) 17

Solução: ALTERNATIVA C

Para determinar de quantas formas as 4 amigas podem se organizar para jogar, vamos considerar os seguintes casos:

1º caso: Apenas duas pessoas jogam

Para escolher a primeira amiga que joga, temos 4 possibilidades. Já para escolher a segunda amiga, temos 3 possibilidades. Poderíamos pensar que as maneiras de determinar as duas amigas que jogam é $4 \times 3 = 12$. Entretanto, assim estaríamos contabilizando cada dupla duas vezes (mas em ordem diferente). Logo, o total de maneira de duas meninas se organizarem para jogar, independente da ordem, é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Ou ainda, usando a fórmula de combinação simples, $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, temos que:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

2º caso: Três pessoas jogam

Nesse caso, como 3 jogam, sobra sempre uma pessoa. Assim, temos 4 possibilidades para a pessoa que sobra.

$$\text{Ou ainda: } C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4}{1} = 4$$

3º caso: Quatro pessoas jogam.

Nesse caso temos apenas 1 possibilidade, que é todas as quatro amigas jogarem.

Logo, o total de maneiras das amigas se organizarem para jogar é $6 + 4 + 1 = 11$

Questão 4: Em um prédio de 4 andares moram quatro mulheres: Amanda, Brenda, Carla e Daniela. Elas moram em andares distintos e cada uma possui um animal de estimação diferente: cachorro, gato, passarinho e hamster. Daniela vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu. Amanda, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Carla, que tem o passarinho e não mora no 2º andar. Quem mora no 3º andar tem uma hamster. Sendo assim, é correto afirmar que:

- A) Carla não mora no 1º andar.
- B) Daniela tem um gato.
- C) Amanda mora no 3º andar e tem um gato.
- D) O gato é o animal de estimação da menina que mora no 1º andar.
- E) Brenda mora no 4º andar e tem um cachorro.

Solução: ALTERNATIVA E

Pela primeira sentença, “*Daniela vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu*”, sabemos que Daniela não mora no último andar, podendo assim, morar no 1º, 2º ou 3º.

Pela segunda sentença, “*Amanda, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Carla, que tem o passarinho e não mora no 2º andar*”, temos que Amanda não mora no 4º andar e nem no 3º

(pois Carla não mora no 2º). Assim, Amanda só pode morar no segundo e Carla no primeiro. Com isso, também concluímos que Daniela mora no 3º, e, conseqüentemente, Brenda mora no 4º andar. Já pela terceira sentença, **“Quem mora no 3º andar tem uma hamster”**, sabemos que a dona do hamster é Daniela.

Como Daniela mora no andar abaixo de quem tem um cachorro, a dona do cachorro é Brenda. Além disso, a dona do passarinho é Carla, então só nos resta que a dona do gato é Amanda.

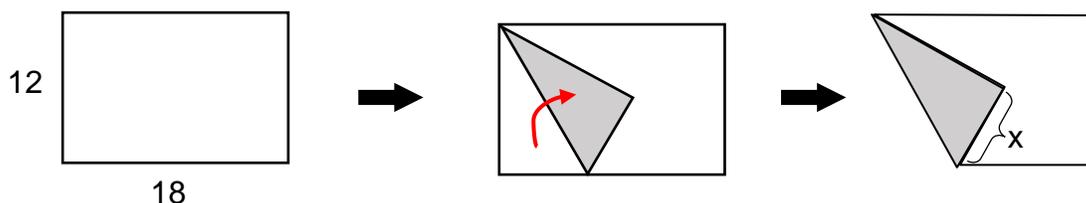
Veja abaixo a tabela com a relação das mulheres e seus respectivos andares de residência e animais de estimação:

	Amanda	Brenda	Carla	Daniela
Andar	2	4	1	3
Animal	Gato	Cachorro	Passarinho	Hamster

Podemos agora analisar as alternativas:

- A) Falsa, pois Carla mora no 1º andar
- B) Falsa, pois Daniela tem um hamster
- C) Falsa, pois Amanda mora no 2º andar
- D) Falsa, pois o gato é o animal de estimação de quem mora no 2º andar
- E) Verdadeira

Questão 5: Uma folha de papel branca e com verso hachurado, de 18 cm de comprimento e 12 cm de largura, foi dobrada conforme a figura abaixo:



Se a área branca da folha, após a dobra, é o triplo da área hachurada, qual o valor x ?

- a) 3,2 cm
- b) 3,6 cm
- c) 4,5 cm
- d) 7,2 cm
- e) 7,9 cm

Solução: ALTERNATIVA D → **Questão anulada**

A área da folha inteira é $18 \cdot 12 = 216 \text{ cm}^2$. O triângulo cinza, por sua vez, possui área $\frac{12x}{2} = 6x \text{ cm}^2$. Como é uma dobradura, a região ocupada pelo triângulo cinza sobre a parte branca da folha é o dobro de sua área, ou seja, $2 \cdot 6x = 12x \text{ cm}^2$. Assim, a área branca da folha, após a dobradura é $216 - 12x$.

Como a área branca é o triplo da área cinza, temos que:

$$216 - 12x = 3 \cdot 6x$$

$$216 = 18x + 12x$$

$$30x = 216$$

$$x = \frac{216}{30}$$

$$x = 7,2$$

Questão 6: Um tanque de água vazio foi abastecido por dois canos de água A e B , ambos com vazão constante. Durante 2 horas, as duas entradas de água ficaram ligadas e encheram 50% do tanque. Em seguida, o registro do cano B foi fechado e durante 1 hora o cano A encheu 15% do volume do tanque. Após este período, o registro do cano A foi fechado e o do cano B aberto. Durante quanto tempo o registro do cano B teve de ficar aberto para que ele sozinho terminasse de encher o tanque?

A) 2,5 h

B) 3,5 h

C) 45 h

D) 5,25 h

E) 5,5 h

Solução: ALTERNATIVA B

Como os canos A e B despejam água no tanque com vazão constante, o volume de água despejado no tanque por cada cano é proporcional ao tempo em que ele fica aberto. Assim, se durante 1 hora o cano A enche 15% do volume do tanque, então em 2 horas ele encherá 30% do volume do tanque. Mas, quando os registros dos canos A e B ficam simultaneamente abertos durante 2 horas, eles conseguem encher 50% do volume do tanque. Daí temos que o cano B enche

$50\% - 30\% = 20\%$ do volume do tanque em 2 horas.

Para saber quanto tempo o registro do cano B deve ficar aberto para encher os 35% restantes do volume do tanque, basta utilizar a proporção:

horas \rightarrow percentual

2 \rightarrow 20%

x \rightarrow 35%

Logo, o cano B gastará $x = \frac{2 \cdot 35}{20} = 3,5$ horas para encher os 35% restantes.

Questão 7: A senha do cofre de Júlia é composta por três algarismos, de 0 a 9, todos distintos. Com medo de esquecer sua senha, ela anotou em um papel as seguintes sentenças:

- 789** Um algarismo correto, mas na posição errada.
- 752** Um algarismo correto na posição correta.
- 247** Dois algarismos corretos, mas ambos na posição errada.
- 835** Nenhum algarismo correto.
- 354** Um algarismo correto, mas na posição errada.

Seu irmão Pedro encontrou suas anotações e decidiu decifrar a senha. Se Pedro conseguiu descobrir a numeração correta, qual numeração ele digitou para abrir o cofre?

- A) 492 B) 482 C) 849 D) 742 E) 472

Solução: ALTERNATIVA A

Partindo da 4ª sentença, temos que os números 8, 3 e 5 não compõem a senha. Assim, o algarismo correto da sequência da última sentença é o 4.

Logo, temos as seguintes possibilidades:

4 _ _ ou _ 4 _

Pela terceira sentença, temos que o algarismo 4 não está na segunda posição. Portanto, ele está na primeira posição:

4 _ _

Pela primeira e segunda sentenças, temos que o algarismo 7 não é o algarismo correto, pois não tem como ele estar na posição correta e errada simultaneamente. Logo, o algarismo correto e na posição correta da 2ª sentença é o 2. Assim:

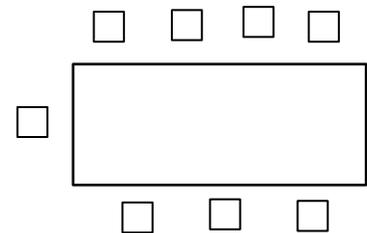
$$\underline{4} _ \underline{2}$$

Então, o algarismo correto, mas na posição errada, da primeira sentença é o 9.

Por fim, temos que a senha do cofre é 4 9 2.

Questão 8: Sete amigos, entre eles Fabio e Joana, vão jantar em uma mesa cujos lados têm 4, 3 e 1 lugar para se sentar, como na figura abaixo. De quantas maneiras os sete amigos podem se sentar na mesa, de modo que Fábio e Joana fiquem sentados juntos em um dos lados da mesa?

- A) 600
- B) 725
- C) 1200
- D) 3600
- E) 7200



Solução: ALTERNATIVA E

Há 5 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 2 no lado com três lugares e 3 no lado com quatro lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Joana e Fábio podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Logo, há $2 \times 5 = 10$ maneiras dos dois se sentarem a mesa. Os quatro amigos que ainda estão em pé, podem se sentar nos 6 lugares vazios de $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar-se à mesa de $10 \times 720 = 7200$ maneiras diferentes.

Questão 9: Com os algarismos 1, 3, 4, 5 e 7 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

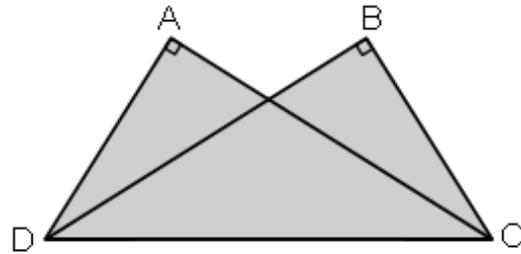
- A) 9820
- B) 12740
- C) 18680
- D) 26640
- E) 28760

Solução: ALTERNATIVA D

Com os números 1, 3, 4, 5 e 7 podem-se formar $5 \times 4 \times 3 = 60$ números de três algarismos distintos, pois temos 5 possibilidades para escolher a centena, depois 4 possibilidades para escolher a dezena e por fim 3 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer doze vezes cada um dos algarismos 7, 5, 4, 3 e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 60 números e $60 \div 5 = 12$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $12 \times (1 + 3 + 4 + 5 + 7) = 240$, a soma desses 60 números será $240 + (10 \times 240) + (100 \times 240) = 111 \times 240 = 26640$.

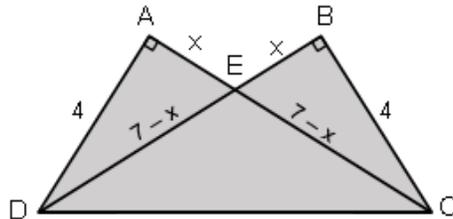
Questão 10: Dois triângulos retângulos congruentes possuem catetos de medidas 4 cm e 7 cm. Na figura abaixo, eles foram desenhados de modo a coincidirem as hipotenusas, donde $AD = BC = 4$ cm e $AC = BD = 7$ cm. Qual é a área da região sombreada?

- A) $2 \frac{5}{14}$
- B) $4 \frac{10}{14}$
- C) $18 \frac{5}{7}$
- D) $20 \frac{1}{2}$
- E) $20 \frac{4}{7}$



Solução: ALTERNATIVA C

Sejam E o ponto de interseção dos segmentos AC e BD, $x = AE = BE$ e $7 - x = CE = DE$.



A área sombreada é a soma das áreas dos triângulos ADE e ABC, ou seja:

$$\frac{4 \cdot x}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2} = 2x + 14$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADE, temos:

$$(7 - x)^2 = 4^2 + x^2$$

$$49 - 14x + x^2 = 16 + x^2$$

$$49 - 14x = 16$$

$$14x = 49 - 16$$

$$x = \frac{33}{14}$$

Logo, a área sombreada é:

$$2x + 14 \Rightarrow 2 \cdot \frac{33}{14} + 14 = 4\frac{5}{7} + 14 = 18\frac{5}{7}$$

