UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

OMOC – OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO OESTE CATARINENSE

CADERNO DE SOLUÇÕES VESPERTINO – PRIMEIRA FASE

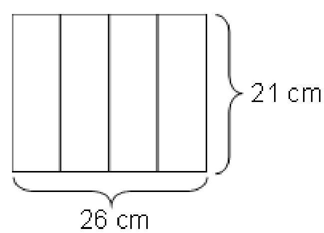
NÍVEL III - ENSINO MÉDIO

Questão 1: Uma caixa de suco de laranja possui 21 cm de altura e perímetro da base igual a 26 cm. Sabendo-se que a base da caixa é formada por um quadrado, calcule a quantidade de papel necessária, em cm^2, para confeccionar a caixa, desprezando-se as dobras.

A) 546 B) 630,5 C) 395,5 D) 480 E) 720,5

Solução: ALTERNATIVA B

Como o perímetro da base é 26 cm, temos que a lateral da caixa é formada por um retângulo de área 26 x 21 = 546 cm^2, representado na figura ao lado.



Como a base é um quadrado, seu lado é $26 \div 4 = 6{,}5$ cm e, consequentemente, sua área é $6{,}5 \times 6{,}5 = 42{,}25$ cm^2. Logo, a quantidade total de papel necessária para confeccionar a caixa é $546 + 2\times 42{,}25 = 630{,}5$ cm^2.

Questão 2: Na prova da primeira fase da IV OMOC, houveram 4 mil alunos participantes, sendo que 15% destes alunos passaram para a segunda fase. Dos 15% que passaram para a segunda fase, 5% foram medalhistas de ouro, 10% foram medalhistas de prata, 15% foram medalhistas de bronze e 25% premiados com menções honrosas. Dos alunos aprovados para segunda fase, quantos não foram premiados?

A) 270 B) 30 C) 27 D) 330 E) 300

Solução: ALTERNATIVA A

O total de alunos que passaram para a segunda fase é $4000 \times 0{,}15 = 600$ alunos. Destes, 5% + 10% + 15% + 25% = 55% foram premiados, portanto, 45% não foram premiados. Assim, temos que dos alunos que passaram para a segunda fase, os não premiados foram $600 \times 0{,}45 = 270$ alunos.

Questão 3: Em um prédio de 4 andares moram quatro mulheres: Amanda, Brenda, Carla e Daniela. Elas moram em andares distintos e cada uma possui um animal de estimação diferente: cachorro, gato, passarinho e hamster. Daniela vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu. Amanda, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Carla, que tem o passarinho e não mora no 2º andar. Quem mora no 3º andar tem uma hamster. Sendo assim, é correto afirmar que:

A) Carla não mora no 1º andar.

B) Daniela tem um gato.

C) Amanda mora no 3º andar e tem um gato.

D) O gato é o animal de estimação da menina que mora no 1º andar.

E) Brenda mora no 4º andar e tem um cachorro.

Solução: ALTERNATIVA E

Pela primeira sentença, ***"Daniela vive reclamando do barulho feito pelo cachorro, no andar imediatamente acima do seu"***, sabemos que Daniela não mora no último andar, podendo assim, morar no 1º, 2º ou 3º.

Pela segunda sentença, ***"Amanda, que não mora no 4º, mora um andar acima do de Carla, que tem o passarinho e não mora no 2º andar"***, temos que Amanda não mora no 4º andar e nem no 3º (pois Carla não mora no 2º). Assim, Amanda só pode morar no segundo e Carla no primeiro. Com isso, também concluímos que Daniela mora no 3º, e, consequentemente, Brenda mora no 4º andar.

Já pela terceira sentença, ***"Quem mora no 3º andar tem uma hamster"***, sabemos que a dona do hamster é Daniela.

Como Daniela mora no andar abaixo de quem tem um cachorro, a dona do cachorro é Brenda. Além disso, a dona do passarinho é Carla, então só nos resta que a dona do gato é Amanda.

Veja abaixo a tabela com a relação das mulheres e seus respectivos andares de residência e animais de estimação:

	Amanda	**Brenda**	**Carla**	**Daniela**
Andar	2	4	1	3
Animal	Gato	Cachorro	Passarinho	Hamster

Podemos agora analisar as alternativas:

A) Falsa, pois Carla mora no 1º andar

B) Falsa, pois Daniela tem um hamster

C) Falsa, pois Amanda mora no 2º andar

D) Falsa, pois o gato é o animal de estimação de quem mora no 2º andar

E) Verdadeira

Questão 4: Ana, Bianca, Carolina e Denise decidiram se reunir para jogar um jogo de cartas. Nesse jogo, são necessários pelo menos dois jogadores, podendo ser jogado também entre 3 ou 4 pessoas. De quantas formas as quatro amigas podem se organizar para jogar, de modo que a ordem em que elas se posicionam no jogo não importa?

A) 6 B) 9 C) 11 D) 15 E) 17

Solução: ALTERNATIVA C

Para determinar de quantas formas as 4 amigas podem se organizar para jogar, vamos considerar os seguintes casos:

<u>**1° caso**</u>**:** <u>Apenas duas pessoas jogam</u>

Para escolher a primeira amiga que joga, temos 4 possibilidades. Já para escolher a segunda amiga, temos 3 possibilidades. Poderíamos pensar que as maneiras de determinar as duas amigas que jogam é 4x3=12. Entretanto, assim estaríamos contabilizando cada dupla duas vezes (mas em ordem diferente). Logo, o total de maneira de duas meninas se organizarem para jogar, independente da ordem, é $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Ou ainda, usando a fórmula de combinação simples, $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, temos que:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

2° caso: Três pessoas jogam

Nesse caso, como 3 jogam, sobra sempre uma pessoa. Assim, temos 4 possibilidades para a pessoa que sobra.

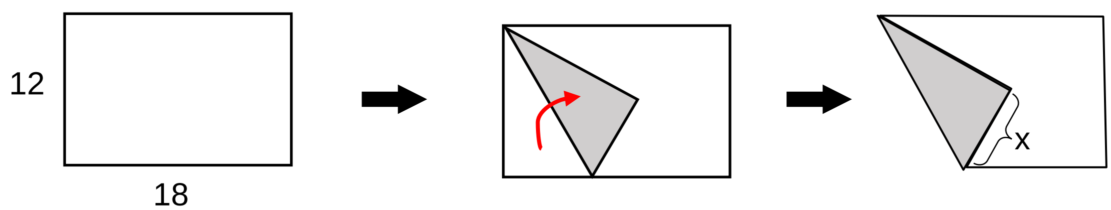
Ou ainda: $C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4}{1} = 4$

3° caso: Quatro pessoas jogam.

Nesse caso temos apenas 1 possibilidade, que é todas as quatro amigas jogarem.

Logo, o total de maneiras das amigas se organizarem para jogar é 6 + 4 + 1 = 11

Questão 5: Uma folha de papel branca e com verso hachurado, de 18 cm de comprimento e 12 cm de largura, foi dobrada conforme a figura abaixo:



Se a área branca da folha, após a dobra, é o triplo da área hachurada, qual o valor x?

A) 3,6 cm B) 7,9 cm C) 7,2 cm D) 4,5 cm E) 3,2 cm

Solução: ALTERNATIVA C (Questão anulada devido à ausência do x na imagem)

A área da folha inteira é $18 \cdot 12 = 216$ cm^2. O triângulo cinza, por sua vez, possui área $\frac{12x}{2} = 6x$ cm^2. Como é uma dobradura, a região ocupada pelo triângulo cinza sobre a parte branca da folha é o dobro de sua área, ou seja, $2 \cdot 6x = 12x$ cm^2. Assim, a área branca da folha, após a dobradura é $216 - 12x$.

Como a área branca é o triplo da área cinza, temos que:

$$216 - 12x = 3 \cdot 6x$$

$$216 = 18x + 12x$$

$$30x = 216$$

$$x = \frac{216}{30}$$

$$x = 7{,}2$$

Questão 6: Um tanque de água vazio foi abastecido por dois canos de água *A* e *B*, ambos com vazão constante. Durante 2 horas, as duas entradas de água ficaram ligadas e encheram 50% do tanque. Em seguida, o registro do cano *B* foi fechado e durante 1 hora o cano *A* encheu 15% do volume do tanque. Após este período, o registro do cano *A* foi fechado e o do cano *B* aberto. Durante quanto tempo o registro do cano *B* teve de ficar aberto para que ele sozinho terminasse de encher o tanque?

A) 4 h B) 5,5 h C) 2,5 h D) 3,5 h E) 5,25 h

Solução: ALTERNATIVA D

Como os canos *A* e *B* despejam água no tanque com vazão constante, o volume de água despejado no tanque por cada cano é proporcional ao tempo em que ele fica aberto. Assim, se durante 1 horas o cano *A* enche 15% do volume do tanque, então em 2 horas ele encherá 30% do volume do tanque.

Mas, quando os registros dos canos *A* e *B* ficam simultaneamente abertos durante 2 horas, eles conseguem encher 50% do volume do tanque. Daí temos que o cano *B* enche

50% − 30% = 20% do volume do tanque em 2 horas.

Para saber quanto tempo o registro do cano B deve ficar aberto para encher os 35% restantes do volume do tanque, basta utilizar a proporção:

horas → percentual

2 → 20%

x → 35%

Logo, o cano B gastará x = $\frac{2 \cdot 35}{20}$ = 3,5 horas para encher os 35% restantes.

Questão 7: Sete amigos, entre eles Fabio e Joana, vão jantar em uma mesa cujos lados têm 4, 3 e 1 lugar para se sentar, como na figura abaixo. De quantas maneiras os sete amigos podem se sentar na mesa, de modo que Fábio e Joana fiquem sentados juntos em um dos lados da mesa?

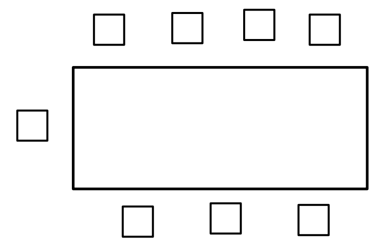
A) 600

B) 725

C) 1200

D) 3600

E) 7200



Solução: ALTERNATIVA E

Há 5 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 2 no lado com três lugares e 3 no lado com quatro lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Joana e Fábio podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Logo, há 5x2=10 maneiras dos dois se sentarem a mesa. Os quatro amigos que ainda estão em pé, podem se sentar nos 6 lugares vazios de $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem sentar-se à mesa de $10 \times 720 = 7200$ maneiras diferentes.

Questão 8: Com os algarismos 1, 3, 4, 5 e 7 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

A) 9820 B) 12740 C) 18680 D) 26640 E) 28760

Solução: ALTERNATIVA D

Com os números 1, 3, 4, 5 e 7 podem-se formar $5 \times 4 \times 3 = 60$ números de três algarismos distintos, pois temos 5 possibilidades para escolher a centena, depois 4 possibilidades para escolher a dezena e por fim 3 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer doze vezes cada um dos algarismos 7, 5, 4, 3 e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 60 números e $60 \div 5 = 12$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $12\times(1 + 3 + 4 + 5 + 7) = 240$, a soma desses 60 números será $240 + (10\times240) + (100\times240) = 111\times240 = 26640$.

Questão 9: A senha do cofre de Júlia é composta por três algarismos, de 0 a 9, todos distintos. Com medo de esquecer sua senha, ela anotou em um papel as seguintes sentenças:

789	Um algarismo correto, mas na posição errada.
752	Um algarismo correto na posição correta.
247	Dois algarismos corretos, mas ambos na posição errada.
835	Nenhum algarismo correto.
354	Um algarismo correto, mas na posição errada.

Seu irmão Pedro encontrou suas anotações e decidiu decifrar a senha. Se Pedro conseguiu descobrir a numeração correta, qual numeração ele digitou para abrir o cofre?

A) 482 B) 492 C) 742 D) 849 E) 472

Solução: ALTERNATIVA B

Partindo da 4ª sentença, temos que os números 8, 3 e 5 não compõem a senha. Assim, o algarismo correto da sequência da última sentença é o 4.

Logo, temos as seguintes possibilidades:

$$\underline{4}\ \_\ \_ \quad \text{ou} \quad \_\ \underline{4}\ \_$$

Pela terceira sentenças, temos que o algarismo 4 não está na segunda posição. Portanto, ele está na primeira posição:

$$\underline{4}\ \_\ \_$$

Pela primeira e segunda sentenças, temos que o algarismo 7 não é o algarismo correto, pois não tem como ele estar na posição correta e errada simultaneamente. Logo, o algarismo correto e na posição correta da 2ª sentença é o 2. Assim:

$$\underline{4}\ \_\ \underline{2}$$

Então, o algarismo correto, mas na posição errada, da primeira sentença é o 9.

Por fim, temos que a senha do cofre é $\underline{4}\ \underline{9}\ \underline{2}$.

Questão 10: Dois triângulos retângulos congruentes possuem catetos de medidas 4 cm e 7 cm. Na figura abaixo, eles foram desenhados de modo a coincidirem as hipotenusas, donde AD = BC = 4 cm e AC = BD = 7 cm. Qual é a área da região sombreada?

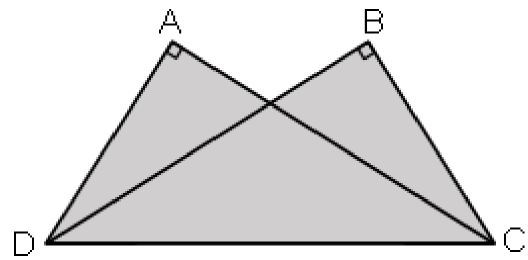
A) $2\frac{5}{14}$

B) $4\frac{10}{14}$

C) $18\frac{5}{7}$

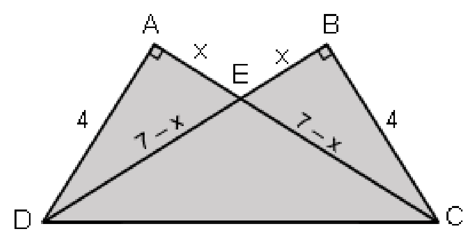
D) $20\frac{1}{2}$

E) $20\frac{4}{7}$



Solução: ALTERNATIVA C

Sejam E o ponto de interseção dos segmentos AC e BD, x = AE = BE e 7 – x = CE = DE.



A área sombreada é a soma das áreas dos triângulos ADE e ABC, ou seja:

$$\frac{4 \cdot x}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2} = 2x + 14$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADE, temos:

$$(7 - x)^2 = 4^2 + x^2$$
$$49 - 14x + x^2 = 16 + x^2$$
$$49 - 14x = 16$$
$$14x = 49 - 16$$
$$x = \frac{33}{14}$$

Logo, a área sombreada é:

$$2x + 14 \implies 2 \cdot \frac{33}{14} + 14 = 4\frac{5}{7} + 14 = 18\frac{5}{7}$$