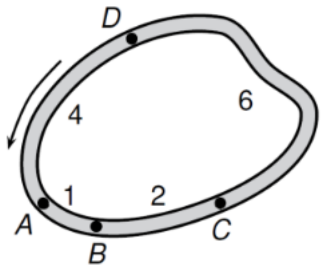
SOLUÇÃO PRIMEIRA LISTA DE TREINAMENTO
SEGUNDA FASE – NÍVEL 3

OMOC

Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense

Questão 1: A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

Questão 1 – Solução:

a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão 1km + 2km + 6km + 4km = 13km. Por isso, para percorrer 14km é preciso dar uma volta completa e percorrer mais 1km. A única forma de percorrer 1km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

b) Como 100 = 7×13+9, uma corrida de 100km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9km. A única forma de percorrer 9km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

Questão 2: Uma calculadora esquisita tem apenas as teclas numéricas de 0 a 9 e duas teclas especiais A e B. Quando a tecla A é apertada, o número que aparece no visor é elevado ao quadrado; quando a tecla B é apertada, soma-se 3 ao número que aparece no visor. Nessa calculadora é possível obter 22 a partir do 1 apertando as teclas A e B na ordem BABB, como ilustrado abaixo:

$$1 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{A} 16 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{B} 22$$

a) Com o 3 inicialmente no visor, qual o número que vai aparecer depois de apertar as teclas A e B na ordem BBAB?

b) Mostre como obter 55 a partir do 1 usando as teclas A e B.

c) Explique porque não é possível obter 54 a partir do 2 usando as teclas A e B.

Questão 2 – Solução:

a) A seguir vemos o que acontece quando começamos com o número 3 no visor e apertamos as teclas na ordem BBAB:

$$3 \xrightarrow{\textbf{B}} 3+3=6 \xrightarrow{\textbf{B}} 6+3=9 \xrightarrow{\textbf{A}} 9^2=81 \xrightarrow{\textbf{B}} 81+3=84$$

Logo, o número que vai aparecer no visor é 84.

b) Uma maneira é apertar as teclas na ordem BBABB, como vemos a seguir:

$$1 \xrightarrow{\textbf{B}} 4 \xrightarrow{\textbf{B}} 7 \xrightarrow{\textbf{A}} 49 \xrightarrow{\textbf{B}} 52 \xrightarrow{\textbf{B}} 55$$

Outra maneira é apertar a tecla B dezoito vezes seguidas; ou então, apertar BA seguida de treze B's.

c) <u>1ª solução</u>: Se o número que aparece no visor após apertar as teclas A e B algumas vezes não é um quadrado perfeito, a última tecla apertada foi necessariamente a tecla B. Desse modo, se o 54 aparece no visor, podemos reconstruir parcialmente a sequência das teclas apertadas até chegar a 54:

$$36 \xrightarrow{\textbf{B}} 39 \xrightarrow{\textbf{B}} 42 \xrightarrow{\textbf{B}} 45 \xrightarrow{\textbf{B}} 48 \xrightarrow{\textbf{B}} 51 \xrightarrow{\textbf{B}} 54$$

Chegamos a 36, que é um quadrado perfeito. Aqui temos as possibilidades

$$0 \xrightarrow{\textbf{B}} 3 \xrightarrow{\textbf{B}} 6 \xrightarrow{\textbf{A}} 36$$

e

$$9 \xrightarrow{\textbf{B}} 12 \xrightarrow{\textbf{B}} 15 \xrightarrow{\textbf{B}} 18 \xrightarrow{\textbf{B}} 21 \xrightarrow{\textbf{B}} 24 \xrightarrow{\textbf{B}} 27 \xrightarrow{\textbf{B}} 30 \xrightarrow{\textbf{B}} 33 \xrightarrow{\textbf{B}} 36$$

Como 9 é um quadrado perfeito, essa última sequência nos dá também duas possibilidades, a saber,

$$0 \xrightarrow{\textbf{B}} 3 \xrightarrow{\textbf{B}} 6 \xrightarrow{\textbf{B}} 9 \quad \text{e} \quad 0 \xrightarrow{\textbf{B}} 3 \xrightarrow{\textbf{A}} 9$$

Vemos assim que é possível chegar a 54 a partir de 0 e 3, mas não a partir de 2.

<u>2ª solução</u>: Se um número inteiro x não é múltiplo de 3 então:

- $x + 3$ não é múltiplo de 3.

De fato, se x + 3 fosse múltiplo de 3, poderíamos escrever $x + 3 = 3y$ para algum inteiro y e então $x = 3y - 3 = 3(y - 1)$ seria múltiplo de 3, absurdo.

- x^2 não é múltiplo de 3.

De fato, os fatores primos de x e x^2 são os mesmos; assim, se 3 não é fator primo de x então também não será fator primo de x^2.

Assim, começando com um número que não é múltiplo de 3 no visor, não é possível chegar a um múltiplo de 3 apertando as teclas A e B. Como 2 não é múltiplo de 3 e $54 = 3 \times 18$ é múltiplo de 3, concluímos que não se pode chegar a 54 a partir do 2.

3ª solução: Vamos tentar chegar a 54 a partir do 2. Como a diferença entre 54 e 2 não é um múltiplo de 3, vemos que não é possível usar apenas a tecla B, ou seja, a tecla A deve ser usada pelo menos uma vez. Por outro lado, a tecla A só pode ser usada em números menores ou iguais a 7. Os números obtidos a partir do 2 que são menores ou iguais a 7 são 2, $4 = 2^2$, $5 = 2 + 3$ e $7 = 2^2 + 3$; seus quadrados são 4, 16, 25 e 49. A partir de 16, 25 e 49 não podemos usar a tecla A outra vez, e como nenhum desses números difere de 54 por um múltiplo de 3, vemos que a partir deles não é possível chegar a 54; o mesmo argumento se aplica ao 4 e a seu quadrado 16. Logo, não é possível obter 54 a partir do 2.

4ª solução: Notamos primeiro que começando do 2 e apertando apenas duas teclas quaisquer, o maior resultado possível é 25 (sequência BA), ou seja, não se chega ao 54. Vamos agora ver o que acontece quando o 2 está no visor e apertamos três teclas.

Sequência de teclas	Número no visor
AAA	256
AAB	19
ABA	49
BAA	625
ABB	10
BAB	28
BBA	64
BBB	11

Podemos eliminar as sequências AAA, BAA e BBA de nossas considerações, pois elas levam a resultados maiores que 54. Para chegar ao 54 a partir dos resultados das outras sequências, não podemos usar a tecla A, pois isso nos daria resultados maiores que 54. Por outro lado, a diferença entre 54 e qualquer dos números 19, 49, 10, 28 e 11 não é um múltiplo de 3, ou seja, também não podemos chegar ao 54 a partir desses números apenas com a tecla B. Logo, não é possível chegar ao 54 a partir do 2.

Questão 3: Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é 5 + 8 + 2 = 15 e a soma dos números da segunda coluna é 9 + 7 + 8 = 24. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?

b) Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel todas as somas sejam números pares.

c) Preencha o quadrado de forma que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Questão 3 – Solução:

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é 2 × 45 = 90. Logo, a soma que está faltando é

$$90 - (9 + 13 + 14 + 17 + 18) = 90 - 71 = 19.$$

b) 1ª solução: Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

2ª solução: Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1, 3, 5, 7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são 5 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.

3ª solução: Sabemos que a soma de números pares, independentemente da quantidade, é sempre par, e que, a soma de quantidades pares de números impares, é par. Ou seja, a soma de dois números ímpares, é par ➔ $i + i = p$.

Dessa forma, para que a soma de uma linha ou coluna seja par, temos que ter 3 números pares ou 1 par e 2 ímpares. Entretanto, como temos 5 números impares no total (1, 3, 5, 7 e 9), uma das somas das linhas e uma das somas das colunas será, obrigatoriamente, ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado. Os seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18; podemos então supor que as somas das linhas são 7, 16, 22 e as somas das colunas são 13, 14, 18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é 1 + 2 + 4 = 7, podemos começar a preencher o quadrado como abaixo:

1	2	4	7

Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são 5 + 8 + 9 = 22 e 6 + 7 + 9 = 22, que vamos considerar separadamente.

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois 4 + 5 = 9 e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como 4 + 8 = 12 e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18.

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são:

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas, troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

Questão 4: André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre si. Para isto, colocam 3 bolas brancas e 1 preta em uma caixa e combinam que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tirará uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirar a bola preta ganhará o livro.

a) Qual é a probabilidade de que André ganhe o livro?

b) Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

Para sortear outro livro entre eles, André sugeriu usar 2 bolas pretas e 6 brancas. Como antes, o primeiro que tirar uma bola preta ganhará o livro; se as primeiras quatro bolas saírem brancas, eles continuarão a retirar bolas, na mesma ordem. Nesse novo sorteio:

c) Qual é a probabilidade de que André ganhe o livro?

d) Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

Questão 4 – Solução:

a) Para André ganhar o livro ele deve retirar a bola preta. Como a caixa contém quatro bolas das quais apenas uma é preta, a probabilidade de ele retirar a bola preta é $\frac{1}{4}$.

b) Para Dalva ganhar o livro, André, Bianca e Carlos devem retirar bolas brancas. Como inicialmente a caixa contém 3 bolas brancas, a probabilidade de André retirar uma bola branca é $\frac{3}{4}$. Supondo que André tire uma bola branca, sobrarão na caixa 2 bolas brancas e 1 preta; assim, a probabilidade de Bianca tirar uma bola branca é $\frac{2}{3}$. Do mesmo modo, se André e Bianca tirarem bolas brancas, a probabilidade de Carlos tirar uma bola branca será $\frac{1}{2}$. Assim, a probabilidade de André, Carlos e Bianca tirarem bolas brancas é $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, que é a probabilidade de Dalva ganhar o livro. Raciocínio semelhante mostra que a probabilidade de qualquer um dos amigos ganhar o livro é $\frac{1}{4}$, ou seja, o sorteio é justo e a ordem em que eles retiram as bolas não tem importância.

c) André pode ganhar o livro de duas maneiras: quando a primeira bola retirada for preta ou então quando as quatro primeiras bolas retiradas forem brancas e a quinta preta. A probabilidade no primeiro caso é $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ e no segundo é $\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{28}$. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{1}{4} + \frac{3}{28} = \frac{5}{14}$.

d) Dalva só vai ganhar o livro no caso em que as três primeiras bolas sorteadas sejam brancas e a quarta preta; de fato, se as quatro primeiras bolas sorteadas forem brancas, sobrarão na caixa duas brancas e duas pretas e uma bola preta será retirada antes que chegue a sua vez. Assim, a probabilidade de que Dalva ganhe o livro é $\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{56} = \frac{2}{14}$.

Observações:

- As probabilidades de Bianca e Carlos ganharem o livro são, respectivamente, $\frac{4}{14}$ e $\frac{3}{14}$. O André foi bem esperto em propor esse novo sorteio!
- Escrevemos todas as probabilidades como frações com o mesmo denominador para compará-las mais rapidamente e também para facilitar a verificação de que a soma de todas é igual a 1.

Questão 5: Em uma sala de aula há uma turma de dez alunos. Precisa-se escolher uma comissão de três alunos para representar esta turma, sendo a comissão composta por: um porta-voz, um diretor de artes e um assessor técnico. Nenhum aluno pode acumular cargos.

a) De quantas maneiras esta comissão pode ser formada?

b) Quantas comissões diferentes podem ser formadas com os alunos Leandro, Renato e Marcelo?

c) Considere agora comissões sem cargos específicos. Quantas comissões de tr6es alunos, sem cargos específicos, podem ser formadas?

Solução questão 5:

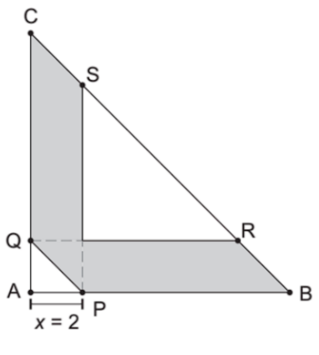
a) Para escolher o porta-voz, temos 3 possibilidades dentre Marcelo, Renato e Leandro. Escolhido o porta-voz, restam duas possibilidades para escolher o diretor de artes. E escolhidos os dois cargos anteriores, só resta uma possibilidade para escolher o último cargo. Logo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes para escolher uma comissão que tenha os alunos Marcelo, Leandro e Renato.

b) Para escolher o porta-voz, temos 10 possibilidades, já que são dez alunos. Escolhido o porta-voz, temos agora 9 possibilidades para escolher o aluno que será o diretor de artes. Finalmente, para escolher o assessor técnico, restam 8 possibilidades. Logo, temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras diferentes para escolher a comissão pedida.

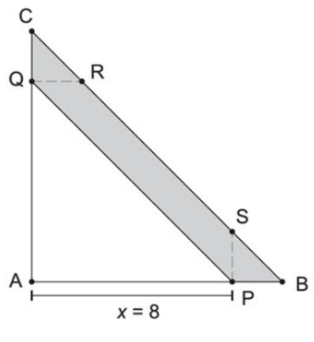
c) Agora não há mais cargos. Logo, as comissões listadas no item **a)** são todas iguais (representam a mesma comissão formada por Marcelo, Renato e Leandro). Para contar quantas são as comissões sem cargo, vamos agrupar as comissões com cargos (porta-voz, diretor de artes e assessor técnico) em grupos de seis comissões que tenham os mesmos três alunos. Como são 720 comissões com cargo, e são grupos de 6 com as mesmas pessoas, obtemos $720 \div 6 = 120$ maneiras diferentes de compor uma comissão sem cargos.

Questão 6: O triângulo retângulo *ABC* tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto *P* sobre o lado *AB* está a uma distância *x* de *A*. O ponto *Q* sobre o lado *AC* é tal que *PQ* é paralelo a *BC*. Os pontos *R* e *S* sobre *BC* são tais que *QR* é paralelo a *AB* e *PS* é paralelo a *AC*. A união dos paralelogramos *PBRQ* e *PSCQ* determina uma região cinza de área *f(x)* no interior do triângulo *ABC*.

a) Calcule $f(2)$.



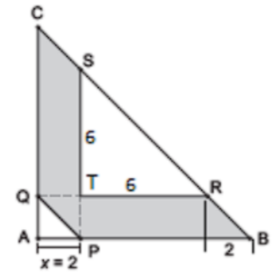
b) Calcule $f(8)$.



c) Encontre a expressão de $f(x)$ para $0 \le x \le 10$.

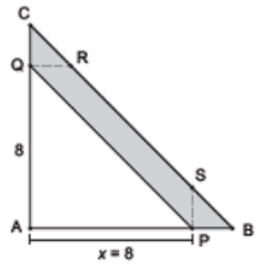
Solução questão 6:

a) Denotemos por T a intersecção das retas QR e PS. Para calcular $f(2)$ basta subtrair da área do triângulo ABC as áreas dos triângulos APQ e TRS. Logo,



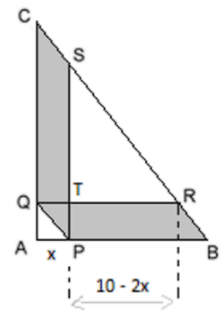
$$f(2) = \frac{10.10}{2} - \frac{2.2}{2} - \frac{6.6}{2} = 30$$

b) Para calcular f(8) basta subtrair a área do triângulo APQ da área do triângulo ABC:



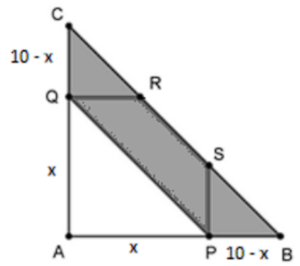
$$f(8) = 50 - \frac{8.8}{2} = 18$$

c) No caso geral, a expressão de f(x) para x ≤ 5 usa a mesma ideia que a utilizada no item **a)**:



$$f(x) = 50 - \frac{x^2}{2} - \frac{(10-2x)}{2} = -\frac{5x^2}{2} + 20x$$

e a expressão de f(x) para x ≥ 5 usa a mesma ideia que a utilizada no item b):



$$f(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$$

Questão 7: Os times A, B, C, D e E disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate, cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time A, seguido na classificação por B, C, D e E, nessa ordem. Além disso:

- o time A não empatou nenhuma partida;
- o time B não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

a) O time A ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time B?

b) Com quantos pontos o time A terminou o torneio?

c) Explique porque o time B obteve um número par de pontos nesse torneio.

d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do **X**, em caso de empate.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

Questão 7 – Solução:

a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.

b) Cada time disputou um total de 4 jogos. O time A perdeu uma partida (contra o time B). Se o time A tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.

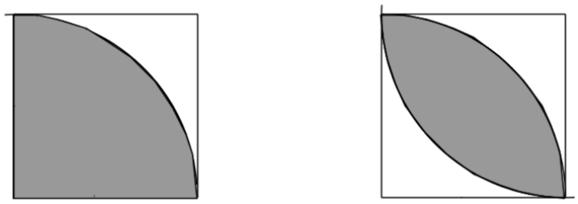
c) 1ª solução: Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª solução: Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 8 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

Questão 8: Em cada uma das figuras a seguir tem-se um quadrado de lado 4. As regiões hachuradas em cada uma destas figuras são limitadas por lados desse quadrado ou por arcos de círculo de raio 4 e centros nos vértices do quadrado.



(a) (b)

a) Calcule a área hachurada da figura (a).

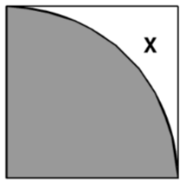
b) Calcule a área hachurada da figura (b).

Solução questão 8:

a) A área hachurada corresponde a um quarto da área de um círculo de raio 4. Como a área de uma circunferência se dá por $A_{circ} = \pi \cdot r^2$, portanto, a área hachurada é igual $\frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi$ cm^2.

b) Observe no item anterior que a área da região NÃO hachurada é igual a diferença entre a área do quadrado e a área da região hachurada. Ou seja:

$$A_{branca} = A_{quadrado} - A_{hachurada}$$
$$x = 16 - 4\pi$$
$$x = 4(4 - \pi) \text{ cm}^2$$



Assim, temos que a área da região hachurada da figura (b) é:

$$A_{hachurada} = A_{quadrado} - 2 \cdot A_{branca}$$
$$A_{hachurada} = 16 - 2x$$
$$A_{hachurada} = 16 - 2(16 - 4\pi\ )$$
$$A_{hachurada} = 16 - 32 + 8\pi$$
$$A_{hachurada} = 8\pi - 16 \text{ cm}^2.$$