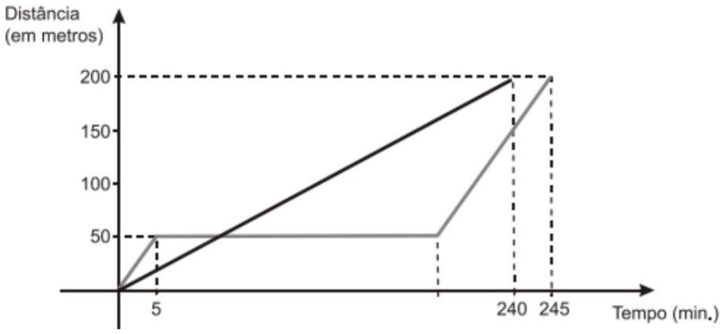
SOLUÇÃO SEGUNDA LISTA DE TREINAMENTO

SEGUNDA FASE – NÍVEL 3

OMOC

Olimpíada de Matemática do Oeste Catarinense

Questão 1: A fabula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fabula lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo. Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

a) determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.

b) determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.

c) determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

Solução questão 1:

a) Observe que a tartaruga completou os 200 metros em 240 minutos, ou seja, em 4 horas. Portanto, sua velocidade média foi de $\frac{200}{4} = 50$ metros por hora.

b) A lebre correu 50 metros e parou para dormir. A função f que determina a quantidade de metros percorridos pela tartaruga em função do tempo t em minutos é $f(t) = \frac{200}{240}\,t$. Como queremos saber em quanto tempo a tartaruga percorreu 50 metros, temos

$$\frac{200}{240}t = 50$$

$$t = 60\,min = 1\,h.$$

c) A lebre percorreu 50 m em 5 min, logo sua velocidade média foi de 10 metros por minuto. Para percorrer 200, ela deveria gastar 20 min, como gastou 245, então ela dormiu 245 − 20 = 225 min

Questão 2: Pedro decidiu levar todos os seus filhos, meninos e meninas, para tomar sorvete na sorveteria Sorvete Matemático. Na sorveteria, há 12 sabores diferentes de sorvete e cada criança pediu um combo com 3 bolas de sorvete. Depois de sair da sorveteria, Pedro percebeu que, no total, foram pedidas exatamente duas bolas de cada sabor disponível na sorveteria.

a) Sabendo que Pedro não tomou sorvete, qual o número total de seus filhos (meninas e meninos)?

b) Pedro olhou com mais atenção os sabores que cada um pediu e notou que nenhum sabor foi pedido por um menino e por uma menina, ou seja, se um menino escolheu um sabor, nenhuma menina escolheu aquele mesmo sabor. Sabendo que pelo menos um de seus filhos é menino e que ele possui mais filhas do que filhos, determine o número de suas filhas.

Solução questão 2:

a) Seja n o número de filhos de Pedro. No total, foram pedidas 3n bolas de sorvete. Como cada um dos 12 sabores foi pedido duas vezes, temos $3n = 2\cdot 12$, ou seja, $n = 8$. Portanto, Pedro possui 8 filhos.

b) Sejam x o número de meninos e y o número de meninas. Pelo item **a)**, sabemos que $x + y = 8$. Como existe pelo menos um filho e há mais filhas do que filhos, sabemos que: $0 < x < y$. Dado que nenhum sabor foi pedido simultaneamente por meninos e por meninas, eles podem ser separados em sabores dos meninos e sabores das meninas. Então, 3x é igual ao dobro do número de sabores dos meninos, pois foram pedidas exatamente duas bolas de cada sabor e nenhuma menina pode pedir um dos sabores dos meninos. Consequentemente, x é par. Do mesmo modo, y também é par. Como $0 < x < y$ e $x + y = 8$, podemos concluir que $x = 2$ e $y = 6$. Daí, Pedro possui 6 filhas.

Questão 3: Uma linha de trem está dividida em 10 trechos pelas estações A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K. A distância de A até K é igual a 56 km. O trajeto de dois trechos consecutivos é sempre menor ou igual a 12 km e o trajeto de três trechos consecutivos sempre é maior ou igual a 17 km. Determine as distâncias:

- **a)** de J até K;
- **b)** de D até H;
- **c)** de B a G.

Solução questão 3:

a) Podemos escrever $AK = 56$ e $AK = AD + DG + GJ + JK$. Como AD, DG e $GJ \geq 17$, então $JK \leq 5$. Daí, para $HK \geq 17$, devemos ter $HJ \geq 12$. Mas, sabemos que $HJ \leq 12$, assim $HJ = 12$. A partir de $HK \geq 17$ e $HJ = 12$, concluímos $JK \geq 5$ e a única possibilidade é $JK = 5$.

b) Por simetria, teremos AB = 5 e BD = 12. Agora, seguimos com

$$DH = AK - AB - BD - HJ - JK$$

$$DH = 56 - 5 - 12 - 5 - 12 = 22.$$

c) Por fim, GJ ≥ 17, mas HJ = 12. Assim GH ≥ 5. A partir de DG ≥ 17 e DH = DG +GH = 22, obtemos DG = 17 e GH = 5. Portanto

$$BG = BD + DG$$

$$BG = 12 + 17$$

$$BG = 29.$$

Questão 4: A partir de hoje, o grande apostador Carlo Pietro decidiu frequentar cassinos diariamente. No primeiro dia, ele apostará em um jogo cuja probabilidade de ganhar é igual a $\frac{1}{2}$. Nos segundo, terceiro e quarto dias, ele apostará em jogos diferentes cujas probabilidades de vitória são, respectivamente, iguais a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e assim por diante nos dias que se seguirem.

a) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o terceiro dia?

b) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o quinto dia?

c) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o 2021º dia?

Solução questão 4:

a) Para que Pietro não tenha ganho até o terceiro dia, é necessário que ele tenha perdido no primeiro, no segundo e no terceiro dia. A probabilidade de que Pietro ganhe no primeiro dia é ½. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro dia é

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de que Pietro ganhe no segundo dia é 1/3. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no segundo dia é

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A probabilidade de que Pietro ganhe no terceiro dia é $\frac{1}{4}$. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no terceiro dia é

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro, segundo e terceiro dia é igual ao produto dessas probabilidades, que nos dá

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

b) Repetimos o mesmo argumento de antes! Agora até o quinto dia, o que nos dá como probabilidade de Pietro não haver ganhado:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

c) Pensando indutivamente, a probabilidade de que Pietro não tenha ganho até o 2021º dia é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2019}{2020} \cdot \frac{2020}{2021} \cdot \frac{2021}{2022} = \frac{1}{2022}$$

Questão 5: Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.

b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

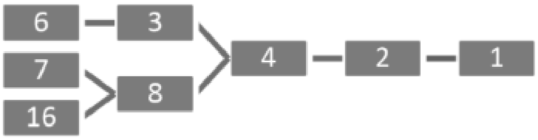
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Justifique sua resposta.

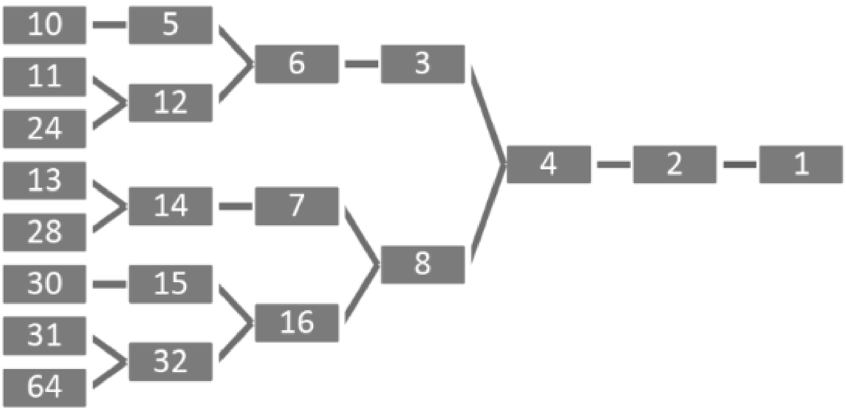
Solução questão 5:

a) A sequência é $37 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

b) A única sequência de comprimento 3 é 4 → 2 → 1. As sequências de comprimento 4 são 3 → 4 → 2 → 1 e 8 → 4 → 2 → 1; elas são obtidas a partir de 4 → 2 → 1, a primeira acrescentando 4 - 1=3 à esquerda e a segunda acrescentando 2 × 4 = 8 à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar 3 → 4 → 2 → 1 dá origem à sequência par 6 → 3 → 4 → 2 → 1; a sequência par 8 → 4 → 2 → 1 dá origem à sequência ímpar 7 → 8 → 4 → 2 → 1 e à sequência par 16 → 8 → 4 → 2 → 1. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) <u>1ª solução</u>: Repetindo o esquema do item anterior, temos:

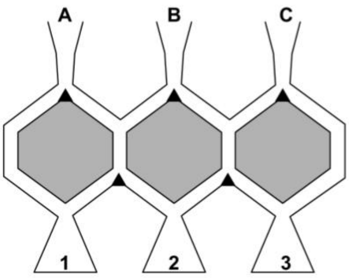


e assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6 e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento 7.

<u>2ª solução</u>: Observamos que a sequência ímpar de comprimento 5 dá origem a uma sequência par de comprimento 6; já as duas sequências pares de comprimento 5 dão origem a duas sequências pares de comprimento 6 e duas sequências ímpares de comprimento 6. Assim, temos duas sequências ímpares de comprimento 6 e 1 + 2 = 3 sequências pares de comprimento 6, num total de 2 + 3 = 5 sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há oito sequências de comprimento 7, sendo três ímpares e cinco pares.

d) As 144 sequências ímpares de comprimento 15 dão origem a 144 sequências pares de comprimento 16; já as 233 sequências pares de comprimento 15 dão origem a 233 sequências pares de comprimento 16 e 233 sequências ímpares de comprimento 16. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento 16 e 233 + 144 = 377 sequências pares de comprimento 16, num total de 233 + 377 = 610 sequências.

Questão 6: No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas A, B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou 3. Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.



a) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?

b) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?

c) Se colocarmos uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez), qual é a probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa?

Questão 6 – solução:

a) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 ou 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer das caixas.

b) Se ela parte de A, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a direita tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 2 é

Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: direita, esquerda ou esquerda, direita; ambos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{4}$. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo, a probabilidade de a bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=50\%$

c) Existem três situações possíveis para que, no final, haja uma bolinha em cada caixa. Descrevemos estas situações na tabela abaixo, onde (por exemplo) a primeira linha indica a situação em que uma bolinha colocada em A cai na caixa 1, outra colocada em B cai na caixa 2 e a última, colocada em C, cai na caixa 3.

	caixa 1	caixa 2	caixa 3
1ª situação	A	B	C
2ª situação	A	C	B
3ª situação	B	A	C

Observando que os eventos “bola colocada em X caiu na caixa Y” são independentes e lembrando que a probabilidade de eventos independentes ocorrerem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de cada evento, a probabilidade de que cada uma destas situações ocorra é:

$$1^a\text{ situação: } \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$$

$$2^a\text{ situação: } \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$$

$$3^a\text{ situação: } \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$$

Por outro lado, a ocorrência de cada uma das configurações acima é um evento disjunto dos outros dois; a probabilidade de ao menos um deles ocorrer é então igual à soma das probabilidades dos eventos individuais. Logo, a probabilidade de que haja uma bolinha em cada caixa é

$$\frac{9}{32}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

Questão 7: O jogo TORRECOPOS consiste em guardar uma pilha de copos, previamente empilhados sobre uma mesa (Figura 1), com as "bocas" voltadas para baixo, de forma que todos fiquem um dentro do outro e apenas um em contato com a mesa (Figura 2). No primeiro andar, os copos são do tipo A, no segundo, do tipo B, no terceiro, do tipo C e assim por diante. Vence o jogo aquele que os recolher no menor tempo. Na Figura 3, podemos obter apenas três configurações depois de recolhidos: AAB, ABA e BAA.

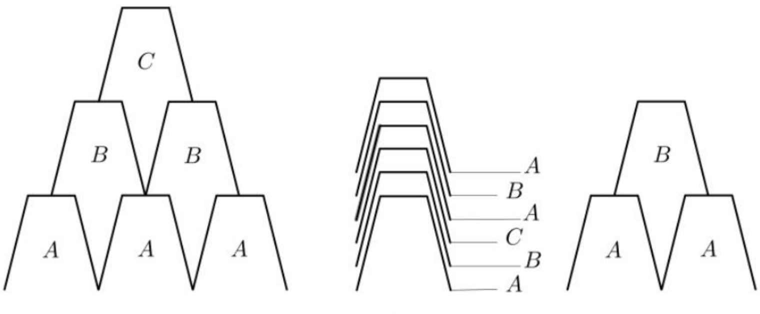


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

a) Na Figura 1, quantas configurações diferentes podemos obter após recolhê-los?

b) Quantas configurações diferentes podemos obter ao recolher os copos em uma torre com 4 andares?

Questão 7 – Solução:

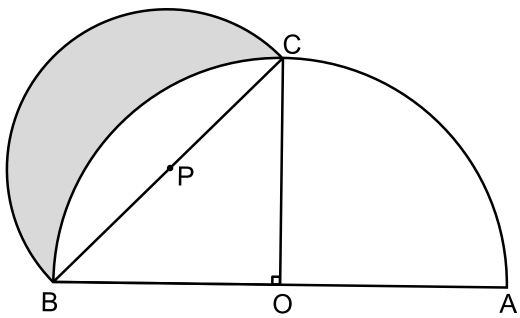
a) *1º solução*: Há 6 maneiras de escolher a posição de *C*. Escolhida a posição de *C*, sobram 5 posições para os copos *B*. Podemos pensar que o número de maneiras de escolher a posição dos copos B é 5×4= 20, entretanto, se os dois copos *B* permutarem entre si, não haverá uma nova configuração. Como os copos B podem permutar de 2 maneiras entre si, temos que há $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ maneiras de escolher a posição dos copos *B*. Após escolhidas as posições de C e B, sobra apenas uma maneira de escolher as posições dos copos *A*, que são as restantes. Logo, podemos obter 6 × 10 × 1 = 60 configurações diferentes.

2ª solução: O número de configurações finais é o mesmo que o número de permutações de uma palavra que possui três letras A, duas letras B e uma letra C, ou seja, $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$.

b) *1ª solução:* Uma torre de 4 andares terá 10 copos: um copo *D*, dois copos *C*, três copos *B* e quatro copos *A*. Temos 10 maneiras de escolher a posição do copo D. Já para os copos C, temos $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ maneiras de escolher as posições. Para os copos *B*, temos $7 \cdot 6 \cdot 5$ maneiras de escolher posições, entretanto, como a ordem entre eles não importa, e é possível permuta-los entre si de 3! maneiras, temos um total de $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ maneiras de escolher as posições dos copos *B*. Após escolhidas as posições dos copos *D*, *C* e *B*, sobra apenas 1 maneira de escolher as posições dos copos A. Portanto, podemos obter $10 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 1 = 12\,600$ configurações diferentes.

2ª solução: Usando o mesmo raciocínio da 2ª solução do item **a)**, porém com quatro letras A, três letras B, duas letras C e uma letra D, temos $\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 12\,600$.

Questão 8: A figura mostra uma semicircunferência de centro O e diametro AB = 4 cm. O segmento BC é a hipotenusa do triângulo retangulo BOC e é o diâmetro da semi circunferencia de centro P.



a) Qual é a área do segmento circular determinado pelo arco $\widehat{BC}$ e o segmento BC?

b) Determine a área da região cinza.

Solução questão 8:

a) A área do segmento circular determinado pelo arco BC e segmento BC, consiste na diferença entre a área do setor circular determinado pelo arco BC e o vértice O, e a área do triangulo reângulo BOC. Ou seja:

$$A_{seg} = A_{setor} - A_{triângulo}$$

A área do setor circular é a metade da área da semicircunferência de centro O. Como a área de uma circunferência se dá por $\pi \cdot r^2$, então a área da semicircunferência é $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$ e, consequentemente, a área do setor circular será $A_{setor} = \frac{\frac{\pi \cdot r^2}{2}}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$.

Como o raio da semicircunferência de centro O é a metade do diâmetro, então o raio é BO = 2 cm. Assim, temos que a área do setor circular é:

$$A_{setor} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4}{4} \Longrightarrow A_{setor} = \pi$$

Já a área de um triângulo se dá por $\frac{b \cdot h}{2}$, assim, a área do triângulo BOC é:

$$A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} \Longrightarrow A_{triângulo} = 2 \text{ cm}^2.$$

Logo, temos que a área do segmento é: $A_{seg} = \pi - 2 \text{ cm}^2$.

b) A área da região cinza se dá pela diferença entre a semicircunferência de centro P e a área do segmento circular calculada no item **a)**. Assim, temos que:

$$A_{cinza} = A_{semicirc} - A_{seg}$$

O raio da semicircunferência de centro P é igual a $\frac{BC}{2}$. Como BC é a hipotenusa do triângulo BOC, temos:

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 \quad \Longrightarrow \quad BC^2 = 2^2 + 2^2 \quad \Longrightarrow \quad BC^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad BC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Assim, o raio da semicircunferência é $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm, e sua área é:

$$A_{semicirc} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{2\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad A_{semicirc} = \pi \text{ cm}^2$$

Logo, temos que a área da região cinza é:

$$A_{cinza} = \pi - (\pi - 2) \quad \Longrightarrow \quad A_{cinza} = 2 \text{ cm}^2$$