Soluções da primeira lista de treinamento

Observação: as soluções das questões foram retiradas do site da OBMEP: http://www.obmep.org.br/index.htm

Questão 01:

250 é a quantidade total de alunos que participaram da olimpíada, e 8% foram premiados. Assim, 8% de 250 é igual a 20. RESPOSTA: ALTERNATIVA E.

Questão 02:

Afirmação do enunciado:

I. Pelo o problema, o culpado sempre mente.

Consequências:

A. Suponha que Ana seja a culpada, porém Ana não se manifestou, assim ela não mentiu, desse modo por I, Ana é inocente. Acontece o mesmo no caso da Cecília.
B. Analisando a afirmação da Daniela: "“Se Bruno é culpado então Cecília é inocente”, pelo o enunciado, apenas um dos sobrinhos comeu todos os biscoitos, assim essa afirmação é verdadeira. Logo, daniela disse a verdade, assim sendo não foi ela quem comeu todos os biscoitos.
C. Analisando a frase do Eduardo: “O culpado é uma menina”, o que contradiz A e B, logo Eduardo está mentindo, por I ele é o culpado.

RESPOSTA: ALTERNATIVA E.

Questão 03:

ALTERNATIVA E

Os valores das expressões são: A) 8, B) 11, C) 11, D) - 7 e E) - 8. Portanto, a expressão com o menor valor é a que está na letra E.

Questão 04:

Temos $90° = A\hat{B}C = A\hat{B}E + E\hat{B}C = 20° + E\hat{B}C$ e, então, $E\hat{B}C = 70°$; como o triângulo CBE é isósceles de base BE, temos também $B\hat{E}C = 70°$. Por outro lado, temos $D\hat{B}C = 45°$, pois BD é diagonal do quadrado; de $70° = E\hat{B}F + F\hat{B}C = E\hat{B}F + 45°$ segue então que $E\hat{B}F = 25°$. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180° e no triângulo EBF já temos os ângulos $B\hat{E}C = 70°$ e $E\hat{B}F = 25°$, segue que $B\hat{F}E = 180° - (25° + 70°) = 85°$. Finalmente, os ângulos $B\hat{F}E$ e $C\hat{F}D$ são opostos pelo vértice, logo, iguais. Assim, $D\hat{F}C = 85°$.

Questão 05:

Como $8 = 2^3$ e $9 = 3^2$, temos

$$\begin{aligned} 64 &= \frac{8^x}{2^{x+y}} \\ 2^6 &= 2^{3x-(x+y)} \\ &= 2^{2x-y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 243 &= \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} \\ 3^5 &= 3^{(2x+2y)-4y} \\ &= 3^{2x-2y}. \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - 2y = 5. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos $y = 1$. Substituindo este valor na primeira equação, temos $x = 7/2$. Daí, $2xy = 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot 1 = 7$.

Questão 06:

ALTERNATIVA C

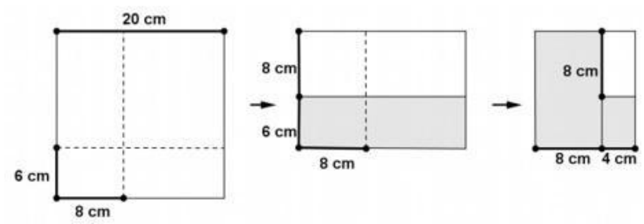
Lembramos que $rendimento = \frac{distância\ percorrida}{consumo}$, ou seja, $consumo = \frac{distância\ percorrida}{rendimento}$. Seja d a distância entre Quixajuba e Pirajuba. Antes da parada Cláudia percorreu $\frac{1}{3}d$ km; como o rendimento de seu carro nessa parte da viagem foi de 12 km/l, ela gastou $\frac{\frac{1}{3}d}{12} = \frac{1}{36}d$ litros de gasolina até a parada. Analogamente, ela gastou $\frac{\frac{2}{3}d}{16} = \frac{1}{24}d$ litros de gasolina após a parada. No total, ela gastou $\frac{1}{36}d + \frac{1}{24}d = \frac{5}{72}d$ litros de gasolina na viagem; o rendimento de seu carro ao longo da viagem completa foi então de $\frac{d}{\frac{5}{72}d} = \frac{72}{5} = 14{,}4$ km/l.

Questão 07:

Beremiz tem que transportar uma carga total de 150 x 60 +100 x 25 = 9000 + 2500 = 11500 quilos. Como a carga máxima da caminhonete é 2000 quilos, em cinco viagens Tio Barnabé poderá transportar no máximo 5 x 2000 = 10000 quilos, faltando ainda 1500 quilos para completar o serviço. Logo, não é possível fazer o serviço em apenas 5 viagens.

Questão 08:

A figura mostra os comprimentos de alguns segmentos ao longo da sequência de dobras. Ao final, vemos que a região branca é um retângulo de lados de comprimento 4 cm e 8 cm; sua área é então 4 x 8 = 32 cm²



Questão 09:

Sabemos que:
• a soma dos números de Fátima e Bernardo é 16;
• a soma dos números de Bernardo e Daniela é 12.
• a soma dos números de Fátima e Daniela é 8;
Assim 16 8 12 36 ++ = é duas vezes a soma dos números de Fátima, Bernardo e Eduardo; logo a soma dos números dessas três crianças é 18. Como a soma dos números de Bernardo e Daniela é 12, o número favorito de Fátima é 18 -12 = 6

Questão 10:

a) Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:

- 1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;
- 2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;
- 3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;
- 4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido.

Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é 3x2 = 6 ; o resultado da segunda conta é 6+ 3=9 ; e o da terceira conta é 9x5 = 45. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é 45 + 4 =49 . Assim Joãozinho deve dizer “Quarenta e nove” aomatemágico.

b) 1ª solução: Vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas.Qualquer que seja esse número, após a terceira conta obtemos um múltiplo de 5, ou seja, um número cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o algarismo das unidades do número dito ao matemático é:
• 1 ou 6, se o cartão escolhido é verde;
• 2 ou 7, se o cartão escolhido é amarelo;
• 3 ou 8, se o cartão escolhido é azul;
• 4 ou 9, se o cartão escolhido é vermelho.
Desse modo, se Mariazinha disse 76 ao matemágico, seu cartão era verde e o resultado da terceira conta realizada por ela foi 76 −1 = 75 ; o resultado da segunda conta foi 75 ÷ 5 =15;

o resultado da primeira conta foi 15 − 3 =12 = e o número no cartão escolhido por Mariazinha foi 12 ÷ 2 = 6 =. Conferindo: (2 x 6 + 3) x 5 +1 = 76
2ª solução: Essa solução não difere essencialmente da anterior, mas é mais precisa e permite uma solução imediata do item c). Como antes, vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, ao multiplicar por 2 obtemos um número par; ao somar 3 ao resultado, obtemos um número ímpar (esse é o detalhe em que essa solução difere da anterior). Ao multiplicar por 5, obtemos um número cujo algarismo das unidades é 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o último algarismo do número dito ao matemático é

- 6, se o cartão escolhido é verde;
- 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 8, se o cartão escolhido é azul;
- 9, se o cartão escolhido é vermelho.

O restante dessa solução procede como a anterior.
3ª solução (algébrica): Seja x o número de um cartão; então o número dito ao matemágico é 5(2x + 3) + y =10x 15 +y , onde y é um número inteiro de 1 a 4 correspondendo à cor do cartão. Temos aqui 10x + 15 +y =76 , ou seja, 10x +y = 61. Como o dígito das unidades de 10x é 0, vemos que y só pode ser 1; logo 10x = 60 , donde x = 6 e concluímos que o cartão escolhido foi o 6 verde.

c) 1ª solução: (de acordo com a 1ª solução do item b)): Quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele pensou assim: se as contas de Pedrinho estiverem corretas, o cartão deve ser verde (pois o algarismo das unidades de 61 é 1) e depois da terceira conta o número obtido foi 61− 1 =60, depois da segunda conta o número obtido foi 60 ÷ 5 =12, depois da primeira conta o número obtido foi 12 − 3= 9 e então o número no cartão deve ser 9÷ 2= 4,5 o que não pode acontecer pois os números nos cartões são números inteiros. Logo Pedrinho deve ter errado alguma conta.

2ª solução (de acordo com a 2ª solução do item b)): Dizer ao matemágico um número cujo algarismo das unidades é diferente de 6, 7, 8 ou 9 indica que houve algum erro de conta.

Questão 11:

Observamos que 2 litros equivalem a 2000 mililitros. Como 200 = 15 x 130 + 50 , é possível encher completamente 15 copos de 130 mililitros e ainda restam 50 mililitros na jarra.

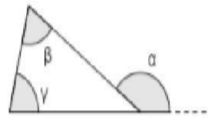
Questão 12:

Reescrevendo, temos:
8(1 x 3 x … 2011) + 16 + 5

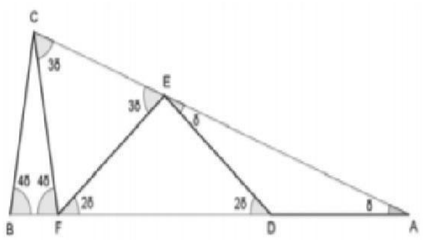
Observe que a primeira parcela é múltiplo de 8, logo o resto da divisão é 0. Como 16 também é múltiplo de 8, ficamos com o 5, apenas. Assim, 5 é o resto da divisão.

Questão 13:

Nesta solução vamos usar repetidamente o resultado de geometria elementar que diz que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Este resultado está ilustrado na figura ao lado e diz que $\alpha = \beta + \gamma$.

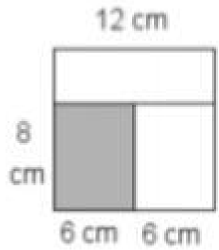


Vamos indicar por δ a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADE é isósceles, temos $D\hat{E}A = \delta$. O ângulo $E\hat{D}F$ é externo ao triângulo ADE, e pelo resultado mencionado acima temos $E\hat{D}F = \delta + \delta = 2\delta$. Como o triângulo DEF é isósceles temos também $E\hat{F}D = 2\delta$; o ângulo $F\hat{E}C$, externo ao triângulo FEA, mede então $2\delta + \delta = 3\delta$. Analogamente, concluímos que $C\hat{B}A = 4\delta$, e como o triângulo ABC é isósceles segue que $B\hat{C}A = 4\delta$. Logo $180° = 4\delta + 4\delta + \delta = 9\delta$, donde $\delta = 20°$.



Questão 14:

O quadrado tem lado 12 cm, logo sua área é igual a 12² = 144 cm². Portanto, cada um dos três retângulos tem área igual a 144/3 = 48 cm². Os dois retângulos inferiores são iguais, pois têm a mesma área e a mesma altura. Logo, têm a mesma largura, igual a 12/2 = 6 cm e, dessa forma, sua altura é 48/6 = 8 cm. Assim, o perímetro do retângulo sombreado é 6 + 8 + 6 + 8 = 28 cm.



Questão 15:

Os múltiplos de 3 maiores do que 1 e menores do que 2005 são os números 3 x 1, 3 x 2, 3 x 3, ..., 3 x n onde 3 x n é o maior múltiplo de 3 menor do que 2005. Usando o algoritmo da divisão, podemos escrever 2005 = 3 x 668 + 1 e segue que n = 668.