Soluções da primeira lista de treinamento

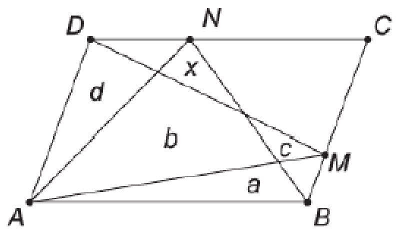
Observação: as soluções das questões foram retiradas do site da OBMEP: http://www.obmep.org.br/index.htm

Questão 01:

ALTERNATIVA A

O triângulo *ABN* tem base *AB* igual à do paralelogramo e altura relativa a essa base igual à altura do paralelogramo relativa a essa mesma base. Portanto, a área de *ABN* (que é igual a $a + b + x$) é igual à metade da área do paralelogramo. Do mesmo modo, a área de *ADM* (igual a $d + b + c$) é também igual à metade da área do paralelogramo.

Logo, $a + b + x = d + b + c$ e, daí, $x = c + d - a$.



Questão 02.

ALTERNATIVA D

Vamos calcular primeiramente o volume do objeto. Como a jarra é cilíndrica, o volume ocupado pela água é proporcional à altura. Olhando a ilustração, sem o objeto mergulhado, o volume de água na jarra é 15 x A = 1000 cm^3, sendo que A é a área da base do cilindro. O volume da água mais o do objeto é V = 18 x A. Logo, substituindo o valor de A nessa última equação, obtemos: V = 18 x (1000/15) = 1200 cm^3. O objeto ocupa, portanto, 200 cm^3, o que equivale a 10,5 x 200 = 2100 g.

Questão 03.

ALTERNATIVA B

Observando que

$$1111111111 = \frac{10^{10}-1}{9}$$ e

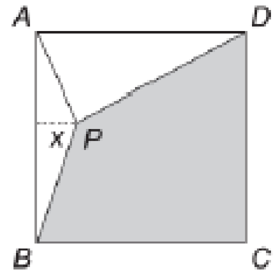
$$22222 = 2 \times 11111 = 2 \times \frac{10^5-1}{9}$$, temos:

$$\sqrt{\frac{10^{10}-1}{9} - 2\times\frac{10^5-1}{9}} = \frac{\sqrt{10^{10}-2.10^5+1}}{3} = \frac{\sqrt{(10^5-1)^2}}{3} = \frac{10^5-1}{3} = 3\times\frac{10^5-1}{9} = 3\times 11111 = 33333$$

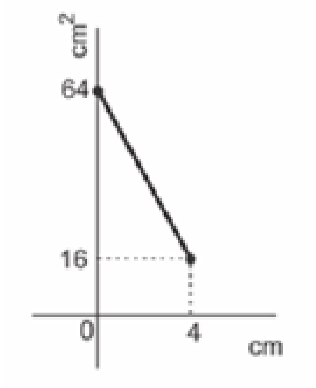
Logo, a soma dos algarismos do número apresentado no enunciado é 3 × 5 =15.

Questão 04.

ALTERNATIVA E



A área do triângulo *ABP* em função de *x* é igual a $\frac{8 \cdot x}{2} = 4x$, pois sua base *AB* mede 8 cm, e a altura relativa a essa base é exatamente a distância do ponto *P* a essa base, ou seja, *x*. A área do triângulo *APD* é o dobro, isto é, $8x$. Portanto, a área da região destacada em cinza é igual à área do quadrado subtraída das áreas desses dois triângulos, ou seja, igual a $8^2 - (4x + 8x) = 64 - 12x$. O valor de *x* varia entre 0, quando *P* coincide com o vértice *A*, e 4, quando *P* coincide com o ponto médio do lado *BC* (lembremos que o ponto *P* deve permanecer no interior do quadrado, conforme nos diz o enunciado). Se *y* é área da região cinza, então $y = 64 - 12x$ para *x* real e $0 \leq x \leq 4$, e o gráfico de *y* em função de *x* é um segmento de reta, conforme figura abaixo.



Questão 05.

ALTERNATIVA D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

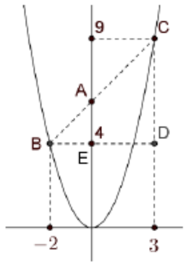
Consideramos dois casos:

a) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 1 ou 10. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 8 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $2 \times 8 = 16$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Multiplicativo da Contagem).

b) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcada com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 7 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $8 \times 7 = 56$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros.

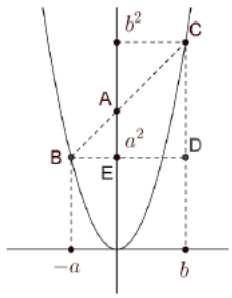
De acordo com as situações anteriores, há um total de $16 + 56 = 72$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Aditivo da Contagem).

Questão 06.



ALTERNATIVA C

Na figura ao lado, marcamos as ordenadas dos pontos B e C. Observamos agora que $\overline{BD} = 3 - (-2) = 5$ e $\overline{CD} = 9 - 4 = 5$; segue que o triângulo BDC é isósceles. Como esse triângulo tem ângulo reto em D, segue também que seus outros dois ângulos, em particular o ângulo em B, medem 45°. O triângulo BEA tem ângulo reto em E e seu ângulo em B mede 45°; logo, ele também é isósceles e, então, $\overline{AE} = \overline{BE} = 2$. Segue que a ordenada de A é $2 + 4 = 6$.



Podemos fazer a mesma pergunta para o caso geral, ilustrado à esquerda; aqui tomamos $a, b > 0$. Suponhamos que $a < b$. O argumento procede observando a semelhança dos triângulos BEA e BDC, que nos dá $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$, ou seja

$$\frac{\overline{AE}}{a} = \frac{b^2 - a^2}{b - (-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{b+a} = b - a$$

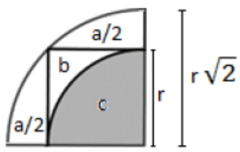
Temos então $\overline{AE} = ab - a^2$ e segue que a ordenada de A é $a^2 + ab - a^2 = ab$. O caso $a = b$ é trivial e o caso $a > b$ é análogo ao que acabamos de fazer. O resultado não muda: a ordenada do ponto A é sempre ab.

Outra solução para o caso geral, usando geometria analítica, é observar que a equação da reta BC é dada por

$$y - a^2 = \frac{b^2-a^2}{b-(-a)}\left(x - (-a)\right) = (b-a)(x+a)\text{; para } x = 0 \text{ temos } y = ab.$$

Questão 07.

ALTERNATIVA A



A figura ao lado é um recorte da figura do enunciado, apresentando, em destaque, os setores dos dois círculos, correspondendo a um quarto do círculo maior, e as regiões ***a***, ***b*** e ***c***. Observe que dividimos a região ***a*** em duas partes de mesma área, indicadas por ***a***/2. Vamos denotar o raio do círculo menor por r. Segue do Teorema de Pitágoras que o raio do círculo maior é igual a $r\sqrt{2}$, conforme vemos na figura. Como os dois setores (um quarto do círculo maior e o menor em cinza da figura) são semelhantes com razão $\frac{r\sqrt{2}}{r}$, segue que a razão entre as áreas dos setores é $\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b+c}{c} = \left(\frac{r\sqrt{2}}{r}\right)^2 = 2$. Portanto, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{c}$, ou seja, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

Questão 08.

ALTERNATIVA B

O MDC de dois números que estão fatorados como produto de primos é o produto dos primos comuns, cada um elevado ao menor expoente que comparece nas fatorações.

Denotamos por α e β os dois números cujo produto é $\mathbf{6000} = 2^4 \times 3 \times 5^3$. Assim, os fatores primos de α e β são 2, 3 ou 5.

O MDC de α e β será o maior possível, quando os fatores primos estiverem distribuídos de forma mais equânime possível. Em particular, o fator primo 2, que ocorre com expoente par na fatoração de 6000, deve ocorrer com o mesmo expoente nas fatorações de α e β, a saber, a metade do expoente (4 ÷ 2 = 2) que aparece na fatoração de 6000. Para o primo 5, cujo expoente é um número ímpar maior do que 2, devemos maximizar sua ocorrência nas fatorações de α e β. Para isso, subtraímos 1 de seu expoente na fatoração de 6000, ou seja, fazemos 3 – 1 = 2, e depois tomamos a metade (2 ÷ 2 = 1). Assim, para o caso estabelecido no enunciado, a fim de maximizar o MDC entre α e β, devemos ter em suas fatorações o produto $2 \times 2 \times 5 = 20$. Uma possibilidade é $\alpha = 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 60$ e $\beta = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 100$. Assim, o maior valor possível para o MDC entre α e β é 20.

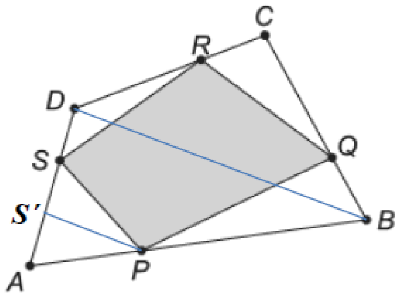
Questão 09.

ALTERNATIVA B

Vamos calcular a área do quadrilátero *PQRS* subtraindo da área do quadrilátero *ABCD* a soma das áreas dos triângulos *APS*, *BQP*, *CRQ* e *DSR*.

Tomemos inicialmente a diagonal *BD* do quadrilátero, que o divide em dois triângulos *ABD* e *CDB*, como na figura ao lado. Chamemos *S'* o ponto médio do segmento *AS*; assim, *AS'* = *AD*/3.

Como *AP* = *AB*/3 e *AS'* = *AD*/3, sabemos, pela recíproca do Teorema de Tales, que o segmento *PS'* é paralelo ao segmento *BD*. Consequentemente, os triângulos *APS'* e *ABD* são semelhantes, a razão de semelhança é 1/3 e, portanto, a razão entre as áreas desses triângulos é 1/9, ou seja,



$$\text{Área }(APS') = \tfrac{1}{9}\,\text{Área}(ABD).$$

Sabemos também que *S'* é o ponto médio ao segmento *AS*, portanto,

$$\text{Área }(APS') = \tfrac{1}{2}\,\text{Área}(APS),$$

pois os dois triângulos têm a mesma altura. Comparando as duas últimas igualdades, concluímos que

$$\text{Área }(APS) = \tfrac{2}{9}\,\text{Área}(ABD).$$

Da mesma forma, podemos verificar que

$$\text{Área}(CRQ) = \tfrac{2}{9}\,\text{Área}(CDB).$$

Somando os termos das duas últimas igualdades, temos que:

Área(*APS*)+Área(*CRQ*) = $\frac{2}{9}$ [Área(*ABD*)+Área(*CDB*)] = $\frac{2}{9}$ Área(*ABCD*) = $\frac{2}{9}$, pois *ABCD* tem área 1.

Da mesma forma, podemos verificar que a soma das áreas dos triângulos *BPQ* e *DRS* também é igual a $\frac{2}{9}$.

Portanto, a área do quadrilátero *PQRS* será igual a $1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

Questão 10.

"há 2 possibilidades (3 depois de 4 ou 4 depois de 3", está errado, o certo é (2 depois de 4) ou (4 depois de 2)

ALTERNATIVA A

Há 5 possibilidades para uma bola ser transferida para a segunda caixa. A seguir, a primeira bola da segunda caixa pode ser escolhida de 6 modos e a segunda, de 5. Há, portanto, 5 x 6 x 5 = 150 casos possíveis.

Vamos contar os casos favoráveis separando-os em duas situações:

a) A bola transferida para a segunda caixa é a de número 3.
   A segunda caixa passa a contar com 6 bolas, sendo duas com o número 3, que vamos representar por 3a e 3b. A soma 6 pode ocorrer retirando duas bolas iguais a 3 (há duas possibilidades para a ordem: 3a depois de 3b ou 3b depois de 3a) ou retirando as bolas 1 e 5, em qualquer ordem (duas possibilidades) ou retirando as bolas 2 e 4 em qualquer ordem (duas possiblidades). Há, portanto, 6 casos favoráveis nesta situação.
b) A bola transferida é uma das bolas 1, 2, 4 ou 5.
   Consideremos, por exemplo, o caso em que a bola transferida é a bola 1 (a situação é a mesma com as demais). A segunda caixa tem 6 bolas, sendo duas com o número 1, que representaremos por 1a e 1b. A soma 6 pode ser formada retirando bolas 1 e 5 ou bolas 2 e 4 (note que não é possível tirar duas bolas 3). No primeiro caso, há 4 possibilidades, a saber: (1a depois de 5), (1b depois de 5), (5 depois de 1a) ou (5 depois de 1b); no segundo há 2 possibilidades (3 depois de 4) ou (4 depois de 3). Temos, então, 6 casos favoráveis quando a bola transferida é a 1. O mesmo ocorre quando a bola transferida é 2, 4 ou 5. Há, portanto, 4 x 6 = 24 casos favoráveis nesta situação.

Assim, o número total de casos favoráveis é 6 + 24 = 30 e a probabilidade de se obter soma 6 é (30/150) = (1/5).

Outra solução:
Vamos considerar todas as somas possíveis dos números nas bolas da segunda caixa depois de feita a transferência; entretanto, agora, não estaremos interessados na ordem em que as bolas são sorteadas (a escolha de uma bola *a* depois de uma bola *b* será considerada a mesma que o da bola *b* depois da *a*), lembrando que a soma é comutativa.
Assim, o número de casos possíveis é

$$N_{possíveis} = \frac{6\times 5}{2} = 15$$

O evento desejado é que as duas bolas sorteadas tenham soma 6.
Independentemente de qual foi a bola transferida, sempre haverá 3 escolhas de duas bolas favoráveis ao evento desejado. Por exemplo:

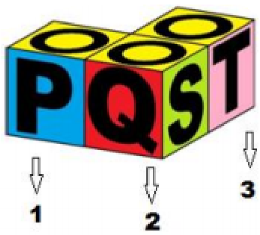
i) se a bola transferida for a de número 3, teremos os pares favoráveis: {1,5}, {2,4} e {3,3};
ii) se a bola sorteada for a de número 1, teremos os pares favoráveis: {1,5}, outro par {1,5} e {2,4} (lembre-se: há, nesse caso, duas bolas com o número 1 na segunda caixa).

Logo, o número de casos favoráveis é

$$N_{favoráveis} = 3$$

Assim, a probabilidade pedida é $P = \frac{N_{favoráveis}}{N_{possíveis}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Questão 11.



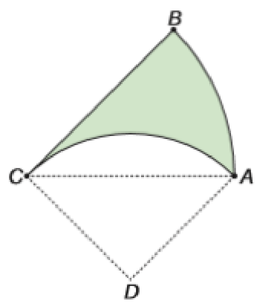
ALTERNATIVA A
Como as letras **P**, **Q**, **S** e **T** estão visíveis na ilustração, essas são as faces adjacentes à face com a letra **O**, e a face oposta à letra **O** é a face com a letra **R**. As faces em contato entre os dados 1 e 2 não podem ser **P** (visível na ilustração do dado 1), nem **Q** ou **S** (visíveis na ilustração do dado 2). Portanto, tem que ser **T**. Olhando para o dado 2, concluímos que a face com **S** é oposta à face com **T**.

Outra solução: A letra **O** possui quatro faces vizinhas com as letras **P**, **Q**, **S** e **T**. Primeiramente observe que Zequinha juntou o dado 2 com o dado 3 pela face **P**, pois esta mesma face não pode estar na junção do dado 2 com o dado 1, que possui a face **P** visível. Logo, os dados 1 e 2 foram juntados pela face **T**. Assim, **S** e **T** são faces opostas, o que responde à questão. É claro também que **P** é oposta a **Q**, bem como **R**, que não aparece na ilustração, é oposta a **O**.

Questão 12.

ALTERNATIVA C
Como $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ e como, pelo enunciado, $a - b = 1$ e $ab = 1$, então $1 = a^2 - 2 + b^2$. Portanto, $a^2 + b^2 = 1 + 2 = 3$.

Questão 13.



ALTERNATIVA A
O cálculo da área solicitada pode ser feito em duas etapas. Na primeira, consideramos a figura *ABCD* formada pela metade do quadrado cujo lado tem comprimento 2 (ou seja, o triângulo *ACD*) e um oitavo do círculo com centro *C* e raio *CA*. A medida de *CA* é $2\sqrt{2}$, pois coincide com a diagonal do quadrado de lado 2.
A área dessa figura é: $\frac{4}{2} + \frac{1}{8}8\pi = 2 + \pi$.
Na segunda etapa, para calcular a área da região verde, observamos que ela pode ser obtida a partir da figura completa *ABCD* retirando um quarto do círculo com centro em *D* e raio *DA*, o qual mede 2. A área desse um quarto de círculo é $\frac{1}{4}4\pi = \pi$.
Fazendo a diferença $(2+\pi) - \pi = 2$, temos a área da região verde.

Questão 14

a) Basta substituir n por 6 e teremos $\frac{2\times6}{6-2} = \frac{12}{4} = 3$.

b) Vamos chamar de n o número que estava no visor no início. Ao apertar pela primeira vez a tecla especial, aparecerá no visor $\frac{2n}{n-2} = y$. Com a tecla especial sendo apertada mais uma vez, teremos no visor o número $\frac{2y}{y-2}$. Substituindo y por $\frac{2n}{n-2}$, temos que o número que aparecerá no visor é

$$\frac{2\left(\frac{2n}{n-2}\right)}{\left(\frac{2n}{n-2}\right)-2} = \frac{\frac{4n}{n-2}}{\frac{2n}{n-2}-2} = \frac{4n}{4} = n.$$

c) Igualando n a $\frac{2n}{n-2}$, temos: $n^2 - 2n = 2n \Rightarrow n^2 - 4n = n(n-4) = 0$. Assim, há duas soluções: $n = 0$ e $n = 4$.

d) Todo número diferente de 2 pode ser obtido ao apertar a tecla especial; como vimos no item b), para obter o número n diferente de 2, basta digitar o número $\frac{2n}{n-2}$. O número que nunca será obtido no visor é o 2, pois se igualarmos $\frac{2n}{n-2} = 2$, teremos $2n = 2n - 4$, ou seja, $0 = -4$, o que é impossível.

Questão 15

a) 1a solução (baseada em contagem)

Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Ana deve receber as bolas de Beatriz, de Cláudia e de Diana e deve jogar sua bola para uma dessas três amigas; logo a probabilidade de Ana receber três bolas é $\frac{3}{81} = \frac{1}{27}$.

2ª. solução:

Para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem necessariamente mandar sua bola para ela. Note que cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas. Assim, a probabilidade de que Beatriz mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$. Empregando o mesmo raciocínio, percebemos que a probabilidade de que Cláudia mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$ e de que Diana mande a bola para Ana também é $\frac{1}{3}$. Todos esses lançamentos são independentes, isto é, o resultado de um lançamento não afeta o resultado de outro lançamento. Assim, a probabilidade de Ana receber as três bolas será de $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

b) 1ª. Solução (baseada em contagem)

Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Em 18 desses jogos Ana recebe exatamente 2 bolas. De fato, se Beatriz é a única que não joga sua bola para Ana, há 6 possibilidades de jogo, pois Beatriz deve jogar sua bola para Cláudia ou para Diana, e Ana pode jogar sua bola para qualquer uma de suas três amigas (são 6 as possibilidades de jogo nesse caso). O mesmo ocorre se Cláudia for a única que não joga sua bola para Ana (outras 6 possibilidades) e também se Diana for a única que não joga sua bola para Ana (mais 6 possibilidades). Logo a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas é $\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$.

2ª. Solução:
Vamos calcular inicialmente a probabilidade de que Ana receba a bola de Beatriz e Cláudia, mas não receba a bola de Diana. Observe que a probabilidade desse evento é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ uma vez que Diana não entrega a bola a Ana.
Note ainda que também devemos considerar o evento no qual Beatriz é a única que não manda a bola para Ana e o evento no qual Cláudia é a única que não manda a bola para Ana. Estes dois eventos também possuem probabilidade igual a $\frac{2}{27}$ pelo mesmo raciocínio utilizado para encontrarmos a probabilidade do primeiro evento analisado neste item. Assim, a probabilidade de Ana receber exatamente duas bolas é

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}.$$

c) 1ª. Solução (baseada em contagem)
Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Novamente vamos calcular o número de casos favoráveis. Observa-se que a primeira criança C1 tem 3 possibilidades de para quem jogar a bola. Seja C2 a criança que recebeu a bola de C1 e observe que C2 também tem 3 possibilidades para jogar sua bola. Agora, as outras duas crianças, C3 e C4, têm apenas uma opção cada, pois se C2 jogou a sua bola para C1, necessariamente C3 deve jogar a bola para C4 e vice versa. Na possibilidade de C2 ter jogado a sua bola para C3 ou C4 (digamos C3), então C3 terá que necessariamente jogar para C4 que por sua vez devolve para C1. Pelo princípio multiplicativo, as possibilidades favoráveis são 3.3.1.1 = 9. Logo, a probabilidade de que cada menina receba uma bola é

$$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

Uma variação dessa solução é a seguinte:

Cada uma das quatro garotas pode passar a bola para uma dentre três de suas amigas. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos um total de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ configurações diferentes resultantes, após tocar o sinal. Agora iremos calcular quantas dessas configurações são tais que cada garota fique com uma bola no final. Chamaremos essas configurações de desejáveis. Veja que Ana tem três opções para mandar sua bola para alguém. A pessoa que receber a bola de Ana também terá três opções, porém vamos separar essa opção em dois casos:

Caso 1: Essa pessoa manda sua bola para Ana. Nesse caso, as outras duas pessoas deverão trocar suas bolas entre si (há 3 possibilidades nesse caso).

Caso 2: Essa pessoa manda sua bola para uma terceira pessoa. Nesse caso, essa terceira pessoa deverá enviar (necessariamente) sua bola para a quarta pessoa. Caso contrário, alguém iria receber mais de uma bola ou alguém ficaria sem receber bola. Note ainda que essa quarta pessoa deverá enviar sua bola necessariamente para Ana.

Nesse caso, há 3 x 2 = 6 possibilidades.
Logo, temos um total de $3 + 6 = 9$ configurações desejáveis. Portanto, a probabilidade de uma delas surgir é de $\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$.

2ª. Solução:
Dividimos em dois casos que dependem de para onde a segunda pessoa joga a bola, se de volta para a primeira pessoa ou se para outra pessoa.
A probabilidade do primeiro caso ocorrer é de $\frac{1}{3}$ e, dentro desse caso, a probabilidade de que, ao final, todas as meninas estejam com uma bola é de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
A probabilidade do segundo caso ocorrer é de $\frac{2}{3}$, e, dentro desse caso, a probabilidade de que ao final todas as meninas estejam com uma bola, também é de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Assim, podemos calcular a probabilidade desejada diretamente:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Há muitas outras formas de calcular as probabilidades, uma delas usa o número de permutações caóticas para se obter o número de caos favoráveis:

$$d_4 = 4!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9.$$