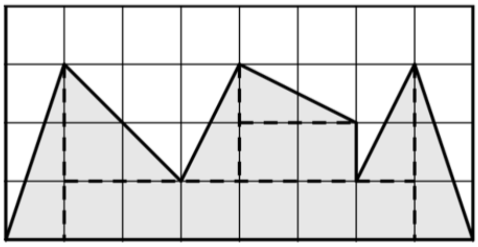
Soluções da segunda lista de treinamento

Observação: as soluções das questões foram retiradas do site da OBMEP: http://www.obmep.org.br/index.htm

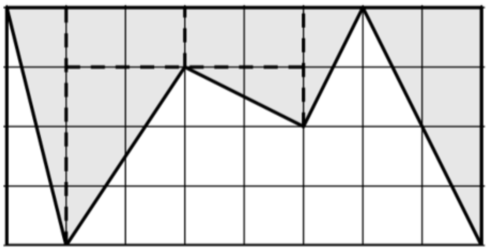
Questão 01:

a) Vamos dividir a parte cinza da figura em triângulos e retângulos, de maneira que os triângulos tenham a metade da área de um retângulo composto por um número inteiro de quadradinhos e cada retângulo composto por um número inteiro de quadradinhos.



Assim, temos que a área cinza é $\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+6+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+2+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=16cm^2$.

b) Vamos repetir o mesmo procedimento do item anterior.



Portanto, a área cinza é $\frac{4}{2}+2+\frac{6}{2}+2+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{8}{2}=15cm^2$.

c) Primeiro devemos perceber que esta figura é a união das figuras dos dois primeiros itens. Com isso, podemos dizer que a área do retângulo total é a soma das áreas cinzas dos dois primeiros itens, mais a área branca, menos a área cinza escuro, pois foi contada duas vezes. Seja x a área branca (soma das três partes), temos:

$$\begin{aligned} 16+15+x-4 &= 8\cdot 4 \\ x+27 &= 32 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Questão 02

a) Se a professora Célia escolher 3, Cláudia deve dizer $2 \cdot 4 = 8$, Marcelo deve dizer $3 \cdot 7 = 21$ e Ademar deve dizer $4 \cdot 22 = 88$.

b) Precisamos analisar o problema de "trás para frente", utilizando as operações inversas. Se Ademar disse 184, então Marcelo só pode ter dito $\frac{184}{4} - 1 = 46 - 1 = 45$ e, conse-

quentemente, Cláudia só pode ter dito $\frac{45}{3} + 1 = 16$, por fim, a professora Célia deve ter dito $\frac{16}{2} - 1 = 7$.

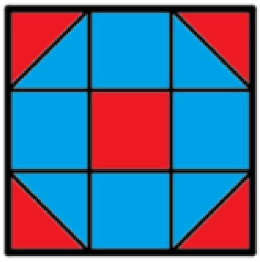
Questão 03:

Como a média dos 5 inteiros é 11, a soma deles é $5 \cdot 11 = 55$. Como todos são inteiros positivos distintos, a soma de quatro deles é pelo menos $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Portanto, o quinto elemento é no máximo $55 - 10 = 45$. Assim, o maior valor possível de um número dessa lista é 45 e um exemplo em que isso acontece é com a lista $1, 2, 3, 4, 45$.

Questão 04:

ALTERNATIVA B

A parte vermelha é formada por um quadradinho mais 4 metades de quadradinhos. Essas 4 metades juntas têm a mesma área que a de 2 quadradinhos. Assim, a área total da parte vermelha é igual à área de 1 + 2 = 3 quadradinhos. Como essa área é de 6 cm^2, cada quadradinho tem uma área de 2 cm^2.
O quadrado inteiro é formado por 9 quadradinhos. Assim, a área em azul equivale à área de 9 – 3 = 6 quadradinhos, que é igual a 6 x 2 = 12 cm^2.



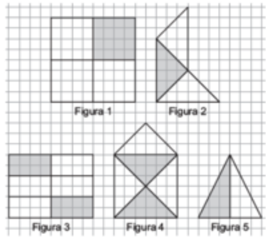
Questão 05:

ALTERNATIVA B

A formiguinha caminha inicialmente para o norte. Notamos que, depois de passar duas placas consecutivas na sequência  ou na sequência , a formiguinha preserva o sentido de sua caminhada. Assim, depois de passar pela sequência das 6 primeiras placas, , ela continuou andando no sentido norte. As duas últimas placas,  e , indicam que ela mudou o sentido de sua caminhada de norte para oeste e depois de oeste para sul; ou seja, após passar pela última placa a formiguinha passou andar no sentido sul (S).

Questão 06:

ALTERNATIVA E



Observemos que os três triângulos da Figura 2 são congruentes (portanto, têm mesma área). De fato, são três triângulos retângulos isósceles com os correspondentes lados de mesma medida (pode ser verificado facilmente no quadriculado). Consequentemente, a área pintada, que é exatamente a de um triângulo, corresponde à fração $\frac{1}{3}$.

Os seis retângulos que constituem a Figura 3 são congruentes. Como a área pintada é formada por dois desses retângulos, segue que a área pintada na Figura 3 corresponde a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ da área total da Figura 3.

Por outro lado, na Figura 4, observamos cinco triângulos congruentes, sendo que apenas dois estão pintados, os quais correspondem à fração $\frac{2}{5}$.

Finalmente, na Figura 5, temos um triângulo isósceles formado por dois triângulos retângulos congruentes, sendo que apenas um deles está pintado. Logo, a área pintada corresponde à fração $\frac{1}{2}$.

Como $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} = \frac{2}{6} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, a maior fração corresponde à área pintada na Figura 5, a saber, $\frac{1}{2}$.

Esta questão serve para exemplificar que devemos ter muito cuidado ao comparar frações, pois, entre diferentes figuras, a fração numericamente maior pode não corresponder visualmente à maior área pintada.

Questão 07:

ALTERNATIVA A

A nota média dos quatro alunos é dada pela soma das quatro notas dividida por 4. Logo, como a média é 7,0, a soma das quatro notas é 4 x 7 = 28.

Assim, a soma das cinco notas é 28 + 8 = 36, o que nos fornece média 36 ÷5 = 7,2.

Questão 08:

ALTERNATIVA E

Vamos analisar cada opção:

A) Falsa, pois no item propaganda o produto A foi o melhor avaliado (recebeu nota 5 contra uma nota 3 do produto B).

B) Falsa, pois o produto de maior utilidade foi o produto B (nota 5), mas o produto menos durável foi o produto C (nota 2).

C) Falsa, pois o produto C obteve a maior pontuação apenas em 2 itens (qualidade e atendimento).

D) Falsa, pois o produto C teve a melhor avaliação em qualidade (nota 5), mas foi o produto A que obteve a melhor avaliação em assistência técnica (nota 4).

E) Verdadeira; de fato, o produto A obteve a maior nota em propaganda (nota 5), mas obteve a nota mais baixa em aparência (nota 1).

Questão 09:

ALTERNATIVA B

A soma dos números dos cartões de Ana é 7, logo, ela pegou os cartões de números 1, 2 e 4, pois esta é a única possibilidade de decomposição do número 7 como soma de três parcelas diferentes, cada uma delas compreendida de 1 a 9. Como 23 é ímpar, temos as seguintes alternativas para os números dos cartões de Beto:

- Os três números são ímpares. Isso é impossível, pois a maior soma possível, nesse caso, é 5 + 7 + 9 =21, menor do que 23.
- Um número é ímpar e os outros dois são pares: como Ana está com os cartões de números 2 e 4, a única possibilidade é Beto ter pego os cartões de números 6, 8 e 9.

Então, na mesa ficaram os cartões de números 3, 5 e 7. A diferença entre o maior e o menor deles é 7 – 3 = 4.

Outra solução: A soma máxima de três cartas é 9 + 8 + 7 = 24. Se a soma de Beto é 23, então, ele tem necessariamente as cartas 9, 8 e 6. A soma mínima de três cartas é 1 + 2 + 3 = 6. Se a soma de Ana é 7, então, ela tem necessariamente 1, 2 e 4. Portanto, na mesa temos as cartas 3, 5 e 7, e a diferença entre a maior e a menor é 7 – 3 = 4.

Questão 10:

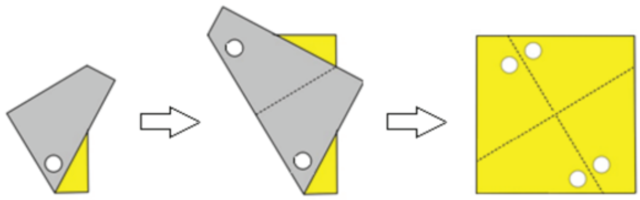
ALTERNATIVA B

Os números que estão escritos dentro do triângulo são: 3, 4, 5, 6 e 7. Os que estão dentro do círculo são: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. Deste modo, os que estão dentro do círculo e do triângulo são: 4, 5 e 6. Como 4 está dentro do quadrado, apenas os números 5 e 6 satisfazem as condições do enunciado. Somando-os, obtemos 5 + 6 = 11.

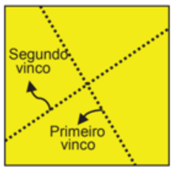
Questão 11:

ALTERNATIVA A

Iniciamos observando que Joãozinho fez 4 furos na folha desdobrada, uma vez que, após as duas dobras, o local escolhido para furar tem 4 camadas de papel. A figura abaixo mostra a posição dos furos após cada desdobra. Observamos ainda que, após uma desdobra, para cada furo, obtemos dois: um na mesma posição e outro em posição simétrica à linha de desdobra.

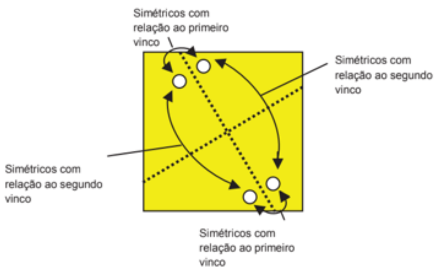


Dentre as figuras das alternativas, apenas a primeira respeita essas simetrias.



Vejamos com mais detalhes: na folha desdobrada, notamos que os vincos deixados pelas duas dobras feitas têm o seguinte aspecto:

Há dois furos inferiores simétricos com relação ao primeiro vinco e mais dois furos superiores que aparecem quando desdobramos a última dobra; esses furos superiores são simétricos aos inferiores com relação ao segundo vinco.



Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 12:

ALTERNATIVA D

A tabela abaixo indica o que João e Maria dizem a respeito do dia da brincadeira (hoje, no diálogo) em cada pergunta:

Pergunta	João	Maria
Primeira	quinta	sexta
Segunda	domingo	sábado
Terceira	quarta	quinta

Como, pelo enunciado, João e Maria deram a resposta correta exatamente uma vez, concluímos que a brincadeira aconteceu em uma quinta-feira.

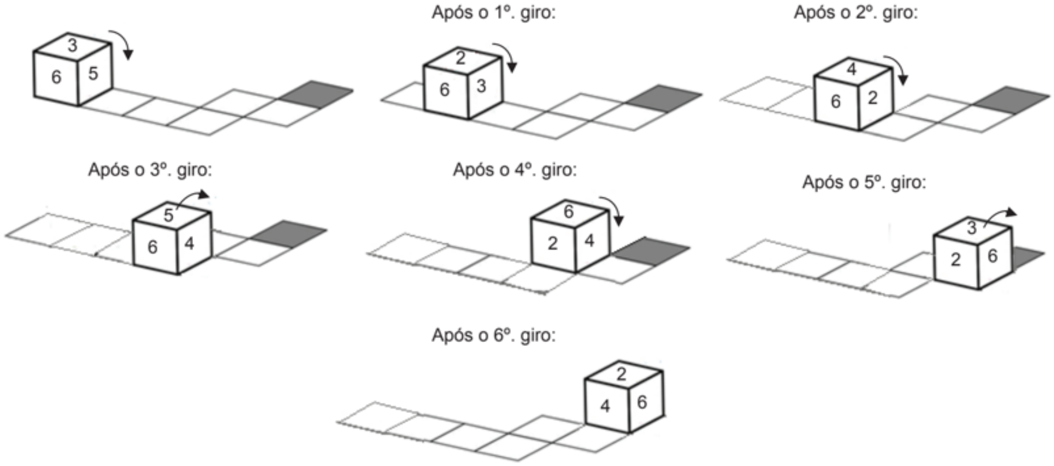
Outra solução: Observamos que a resposta correta de João foi para a primeira pergunta "Que dia da semana é hoje?". As outras duas respostas de João não podem ser verdadeiras, pois implicariam que todas as respostas de Maria estariam erradas. De fato, se a resposta correta de João fosse para a pergunta "Que dia da semana será amanhã?", ou seja, se o dia seguinte fosse uma segunda-feira, a conversa teria ocorrido em um domingo e o dia anterior seria um sábado, confirmando que as três respostas de Maria estariam erradas. Conclusão análoga é encontrada se a resposta correta de João fosse para a pergunta "Que dia da semana foi ontem?". Portanto, a conversa ocorreu em uma quinta-feira.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 13:

ALTERNATIVA B

O enunciado da questão mostra o dado em suas duas primeiras posições. Continuando os sucessivos giros, observamos que as faces do dado se comportam da seguinte maneira:



Assim, o número que aparece no topo do dado quando este estiver sobre a casa cinza é 2.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 14:

ALTERNATIVA D

Como o número total de bolas em cinco caixas consecutivas é sempre o mesmo, a quantidade de bolas da primeira até a quinta caixa deve ser igual à quantidade de bolas da segunda até a sexta caixa:

(nº de bolas na Caixa 1) + 5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) =

5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6)

Logo, (nº de bolas na Caixa 1) = (nº de bolas na Caixa 6).

Pelo mesmo motivo, começando da segunda caixa e depois na terceira caixa,

5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6) =

9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6) + (nº de bolas na Caixa 7).

Logo, o número de bolas na Caixa 7 é 5.

De modo análogo, vemos que o número de bolas da Caixa 8 é 9, o número de bolas na Caixa 9 é 1, que a Caixa 10 possui o mesmo número de bolas que o da Caixa 5 e a Caixa 11, o mesmo número de bolas que o da Caixa 6, o qual é igual ao número de bolas na Caixa 1, como vimos acima. As quantidades de bolas repetem-se a cada cinco caixas.

Na ilustração há a informação de que as caixas contendo 3 e 7 bolas são vizinhas; para que isto ocorra, a Caixa 1 deve conter 7 bolas e as caixas 5 e 6 devem conter, respectivamente, 3 e 7 bolas. Assim, os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ....

De fato, não pode ocorrer que a primeira caixa contenha 3 bolas, pois isto geraria a sequência 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7, ... e a ordem entre 3 e 7 seria incompatível com o que aparece na ilustração no enunciado.

Para descobrir o conteúdo da Caixa 2016, fazemos a divisão de 2016 por 5; o resto é 1 e isto nos diz que o conteúdo da Caixa 2016 é o mesmo que o da Caixa 1, ou seja, que a Caixa 2016 contém 7 bolas.

Solução 2: (utilizando Álgebra)

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 os números de bolas distribuídas em seis caixas consecutivas, respectivamente. Como o número total de bolas em cincos caixas consecutivas é sempre o mesmo, segue que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ e, consequentemente, $x_1 = x_6$. Assim, caixas cujos números diferem por cinco unidades contêm o mesmo número de bolas. Como em duas caixas consecutivas aparecem 3 e 7 bolas, concluímos que os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ..., pois a outra possibilidade, 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7 ..., é incompatível com a informação da ilustração. Assim, a caixa de número 2016 contém a mesma quantidade de bolas que a Caixa 1, a saber, 7 bolas.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 15:

ALTERNATIVA A

Um número natural cujo dobro é um número de dois algarismos deve estar entre 5 e 49. Por outro lado, os números pares são aqueles cuja metade é um número natural, o que reduz a nossa escolha, dentre os números no intervalo acima, aos números pares que vão do 6 ao 48. Considerando agora que, além disso, queremos números cujas metades sejam números de dois algarismos, nossa escolha fica restrita aos números pares entre 20 e 48, incluindo o 20 e o 48. Podemos contá-los sem listá-los, observando, por exemplo, que

$$20 = 2 \times 10,\ 22 = 2 \times 11,\ 24 = 2 \times 12,\ \ldots\ldots,\ 48 = 2 \times 24$$

e teremos 24 – 10 + 1 = 15, números que satisfazem as condições do enunciado.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm