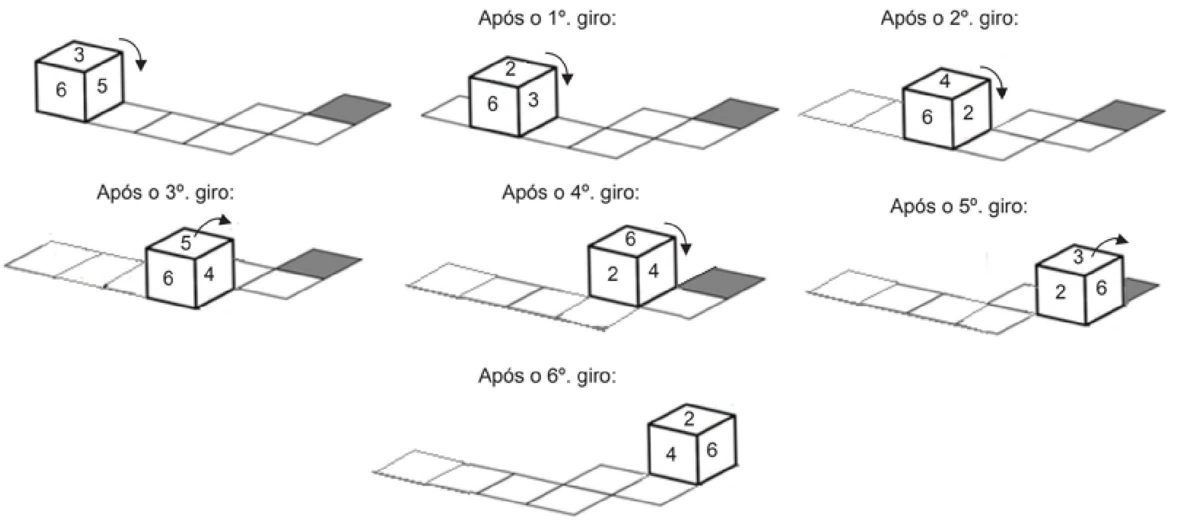
Soluções da segunda lista de treinamento

Observação: as soluções das questões foram retiradas do site da OBMEP: http://www.obmep.org.br/index.htm

Questão 01:

ALTERNATIVA B

O enunciado da questão mostra o dado em suas duas primeiras posições. Continuando os sucessivos giros, observamos que as faces do dado se comportam da seguinte maneira:



Assim, o número que aparece no topo do dado quando este estiver sobre a casa cinza é 2.

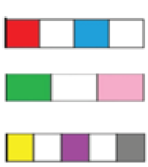
Vídeo que explica essa questão:
http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 02:

ALTERNATIVA B

Cada faixa da bandeira tem área igual a 300 cm². As partes brancas da faixa superior têm, portanto, área igual a 150 cm². A parte branca da faixa do meio tem área igual a 100 cm² e as partes brancas da faixa inferior têm área 120 cm². Logo, a soma das áreas dos retângulos brancos é 150 + 100 + 120 = 370 cm².

Em outras palavras, se A_1, A_2 e A_3 são as áreas dos retângulos brancos, respectivamente, em cada uma das três faixas, então, a área total de todos os retângulos brancos é $A_1 + A_2 + A_3 = 150 + 100 + 120 = 370$ cm².



$$A_1 = \frac{2}{4} \times 300 = 150 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \times 300 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \frac{2}{5} \times 300 = 120 \text{ cm}^2$$

Questão 03:

ALTERNATIVA D

Como o número total de bolas em cinco caixas consecutivas é sempre o mesmo, a quantidade de bolas da primeira até a quinta caixa deve ser igual à quantidade de bolas da segunda até a sexta caixa:

(nº de bolas na Caixa 1) + 5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) =

5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6)

Logo, (nº de bolas na Caixa 1) = (nº de bolas na Caixa 6).

Pelo mesmo motivo, começando da segunda caixa e depois na terceira caixa,

5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6) =

9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6) + (nº de bolas na Caixa 7).

Logo, o número de bolas na Caixa 7 é 5.

De modo análogo, vemos que o número de bolas da Caixa 8 é 9, o número de bolas na Caixa 9 é 1, que a Caixa 10 possui o mesmo número de bolas que o da Caixa 5 e a Caixa 11, o mesmo número de bolas que o da Caixa 6, o qual é igual ao número de bolas na Caixa 1, como vimos acima. As quantidades de bolas repetem-se a cada cinco caixas.

Na ilustração há a informação de que as caixas contendo 3 e 7 bolas são vizinhas; para que isto ocorra, a Caixa 1 deve conter 7 bolas e as caixas 5 e 6 devem conter, respectivamente, 3 e 7 bolas. Assim, os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ....

De fato, não pode ocorrer que a primeira caixa contenha 3 bolas, pois isto geraria a sequência 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7, ... e a ordem entre 3 e 7 seria incompatível com o que aparece na ilustração no enunciado.

Para descobrir o conteúdo da Caixa 2016, fazemos a divisão de 2016 por 5; o resto é 1 e isto nos diz que o conteúdo da Caixa 2016 é o mesmo que o da Caixa 1, ou seja, que a Caixa 2016 contém 7 bolas.

Solução 2: (utilizando Álgebra)

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 os números de bolas distribuídas em seis caixas consecutivas, respectivamente. Como o número total de bolas em cincos caixas consecutivas é sempre o mesmo, segue que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ e, consequentemente, $x_1 = x_6$. Assim, caixas cujos números diferem por cinco unidades contêm o mesmo número de bolas. Como em duas caixas consecutivas aparecem 3 e 7 bolas, concluímos que os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ..., pois a outra possibilidade, 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7 ..., é incompatível com a informação da ilustração. Assim, a caixa de número 2016 contém a mesma quantidade de bolas que a Caixa 1, a saber, 7 bolas.

Vídeo explicando essa pergunta: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 04:

ALTERNATIVA D

A tabela abaixo indica o que João e Maria dizem a respeito do dia da brincadeira (hoje, no diálogo) em cada pergunta:

Pergunta	João	Maria
Primeira	quinta	sexta
Segunda	domingo	sábado
Terceira	quarta	quinta

Como, pelo enunciado, João e Maria deram a resposta correta exatamente uma vez, concluímos que a brincadeira aconteceu em uma quinta-feira.

Outra solução: Observamos que a resposta correta de João foi para a primeira pergunta "Que dia da semana é hoje?". As outras duas respostas de João não podem ser verdadeiras, pois implicariam que todas as respostas de Maria estariam erradas. De fato, se a resposta correta de João fosse para a pergunta "Que dia da semana será amanhã?", ou seja, se o dia seguinte fosse uma segunda-feira, a conversa teria ocorrido em um domingo e o dia anterior seria um sábado, confirmando que as três respostas de Maria estariam erradas. Conclusão análoga é encontrada se a resposta correta de João fosse para a pergunta "Que dia da semana foi ontem?". Portanto, a conversa ocorreu em uma quinta-feira.

Vídeo que explica essa questão:
http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n12016.htm

Questão 05:

ALTERNATIVA D

Para obter o maior resultado possível, devemos fazer com que os termos que contribuem positivamente na conta sejam os maiores possíveis e o termo que contribui negativamente seja o menor possível. Como estamos usando o sistema de numeração posicional decimal, na primeira parcela da conta devemos colocar o maior dos algarismos disponíveis na casa das centenas (o algarismo 8):

$$\boxed{8}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

A seguir, colocamos o segundo maior algarismo na casa das dezenas (o 7). Há duas possibilidades:

$$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{} + \boxed{}\boxed{} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\boxed{}\boxed{} + \boxed{7}\boxed{} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Agora, em cada uma dessas possibilidades, colocamos o algarismo 6, ainda na casa das dezenas:

$$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{} + \boxed{6}\boxed{} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\boxed{6}\boxed{} + \boxed{7}\boxed{} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Continuando, precisamos colocar os algarismos 4 e 5; na primeira das possibilidades acima, há duas maneiras de fazer isto:

$$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{5} + \boxed{6}\boxed{4} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{4} + \boxed{6}\boxed{5} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

e, no outro caso, também há duas possibilidades:

$$\boxed{8}\boxed{6}\boxed{5} + \boxed{7}\boxed{4} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\boxed{6}\boxed{4} + \boxed{7}\boxed{5} - \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Basta agora completar o termo negativo com os algarismos 1, 2 e 3. Em suma, o maior resultado possível pode ser obtido de quatro maneiras diferentes:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{5} + \boxed{6}\,\boxed{4} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$
$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{4} + \boxed{6}\,\boxed{5} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$
$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{5} + \boxed{7}\,\boxed{4} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$
$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{4} + \boxed{7}\,\boxed{5} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

e o resultado final da conta é sempre o mesmo: 816.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n2.htm

Questão 06:

ALTERNATIVA A

Pondo $S = -1 \times 2 + 2 \times 3 - 3 \times 4 + 4 \times 5 - 5 \times 6 + \cdots - 49 \times 50 + 50 \times 51$, agrupando e reordenando convenientemente, obtemos

$$S = 2 \times (3-1) + 4 \times (5-3) + 6 \times (7-5) \cdots + 50 \times (51-49).$$

Portanto,

$$S = 2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + \cdots + 50 \times 2 = 2(2+4+6+\cdots+50) = 4(1+2+3+\cdots+25).$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{S}{1+2+3+\cdots+25} = \frac{4(1+2+3+\cdots+25)}{1+2+3+\cdots+25} = 4.$$

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n2.htm

Questão 07:

item a)

Os possíveis algarismos da 5.ª posição são 6, 7, 8 ou 9. Como 6, 7 e 9 já foram escolhidos, só há uma possibilidade para escolha do algarismo na da 5.ª posição: o algarismo 8.

item b)

Os possíveis algarismos da 4.ª posição são 5, 6, 7, 8 ou 9; entretanto, como 7 foi utilizado na 5.ª posição, há apenas 4 possibilidades de escolha para a 4.ª posição (5, 6, 8 ou 9).

item c)

Observamos primeiramente que há 4 possibilidades de escolha para a 5.ª. posição (6, 7, 8 ou 9). Feita uma dessas escolhas, vemos que há somente 4 possibilidades de escolha para a 4.ª posição.

De fato, o item b) ilustra o que ocorre se o algarismo 7 ocupasse a 5.ª posição e, é claro, o mesmo ocorre se 6, 8 ou 9 ocupar a última posição. Em cada um dos casos, há 4 possibilidades para a 4.ª posição.

Feitas as escolhas das duas últimas posições, vemos também que há 4 escolhas para a terceira posição (das possibilidades 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 devemos excluir duas escolhas já feitas).

Utilizando exatamente o mesmo raciocínio, teremos também 4 escolhas para a segunda posição e 4 escolhas para a primeira posição.

Pelo Princípio Multiplicativo, há 4 x 4 x 4 x 4 x 4 = 4^5 = 1024 senhas diferentes que Fernanda poderá formar.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f2n22016.htm

Questão 08:

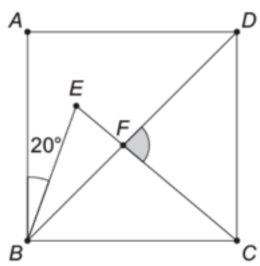
ALTERNATIVA C
Considerando que os cinco dias foram escolhidos ao acaso e, com base nos dados da tabela, podemos concluir sobre as afirmações:
A) É falsa, pois há mais de cinco dias em que Flávia estudou um número de horas diferente de 5 horas. Nos dias escolhidos ao acaso, o número de horas estudadas por dia poderia ser, por exemplo, 3h, 3h, 7h, 7h e 9h.
B) É falsa, pois entre os dias escolhidos podem estar, por exemplo, o dia em que ela estudou 9h e um dia em que ela estudou 7h e somente esses dois dias já somam mais do que 15 horas estudadas.
C) É verdadeira. Os dias escolhidos podem ser exatamente aqueles nos quais Flávia estudou o maior número de horas por dia: um dia de 9h, dois dias de 7h e dois dias de 5h, totalizando $1\times 9+2\times 7+2\times 5=33$ horas.
D) É falsa, pois a soma dos números de horas estudadas nos cinco dias pode ser menor do que 20 horas, por exemplo, cinco dias de 3h por dia. Neste caso a soma das horas estudadas é 15.
E) É falsa, pelo mesmo motivo anterior: a soma dos números de horas estudadas nos cinco dias pode ser menor do que 16 horas, por exemplo, cinco dias de 3h por dia. Nesse caso, a soma das horas estudadas é 15, menor do que 16 horas.

Questão 09:

ALTERNATIVA C
Pensemos assim: se todo habitante da cidade que possui dois celulares doasse um deles para quem não tem celular (somente um celular para quem não tem nenhum), todos passariam a ter um celular cada. Como o número de pessoas que moram na cidade é 3000, há, portanto, 3000 celulares em Quixajuba.

Questão 10:

ALTERNATIVA B
Temos $90° = \widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBC} = 20° + \widehat{EBC}$ e, então, $\widehat{EBC} = 70°$; como o triângulo *CBE* é isósceles de base *BE*, temos também $\widehat{BEC} = 70°$. Por outro lado, temos $\widehat{DBC} = 45°$, pois *BD* é diagonal do quadrado; de $70° = \widehat{EBF} + \widehat{FBC} = \widehat{EBF} + 45°$ segue então que $\widehat{EBF} = 25°$. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180° e no triângulo *EBF* já temos os ângulos $\widehat{BEC} = 70°$ e $\widehat{EBF} = 25°$, segue que $\widehat{BFE} = 180° - (25° + 70°) = 85°$. Finalmente, os ângulos $\widehat{BFE}$ e $\widehat{CFD}$ são opostos pelo vértice, logo, iguais. Assim, $\widehat{DFC} = 85°$.



Questão 11:

ALTERNATIVA E

Vamos analisar cada opção:

A) Falsa, pois no item propaganda o produto A foi o melhor avaliado (recebeu nota 5 contra uma nota 3 do produto B).

B) Falsa, pois o produto de maior utilidade foi o produto B (nota 5), mas o produto menos durável foi o produto C (nota 2).

C) Falsa, pois o produto C obteve a maior pontuação apenas em 2 itens (qualidade e atendimento).

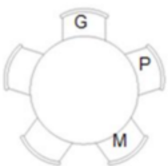
D) Falsa, pois o produto C teve a melhor avaliação em qualidade (nota 5), mas foi o produto A que obteve a melhor avaliação em assistência técnica (nota 4).

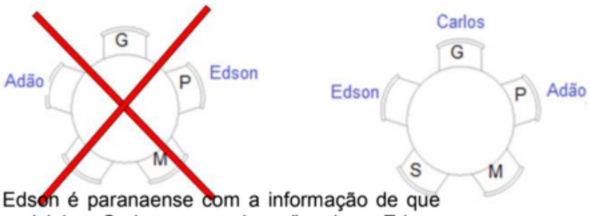
E) Verdadeira; de fato, o produto A obteve a maior nota em propaganda (nota 5), mas obteve a nota mais baixa em aparência (nota 1).

Questão 12:

ALTERNATIVA D

O paranaense está entre o goiano e o mineiro. Como o goiano sentou-se entre Edson e Adão, temos duas possibilidades: Edson é paranaense ou Adão é paranaense.





Eliminamos o caso em que Edson é paranaense com a informação de que "Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano", pois se Edson fosse paranaense ele estaria entre o goiano e o mineiro. Portanto, Adão é o paranaense. Como Edson sentou-se entre Carlos e o sergipano, concluímos que Carlos é goiano e o lugar entre Edson e o mineiro é do sergipano. A última informação do enunciado diz que Bruno sentou-se entre o tocantinense e o mineiro. Logo, Edson é tocantinense e Bruno é sergipano. Portanto, Daniel é mineiro.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2015/f1n22015.htm

Questão 13:

a) Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{n^2-5n+4}{n-4} &= \frac{1^2-5\cdot 1+4}{1-4}\\ &= \frac{1-5+4}{-3}\\ &= 0.\end{aligned}$$

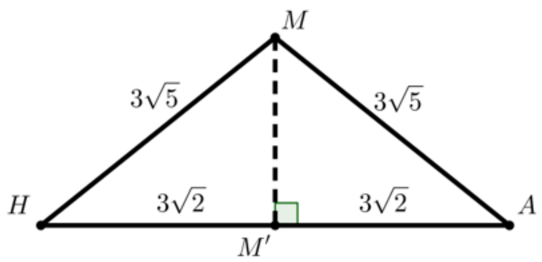
b) Igualando a expressão a 5, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{n^2-5n+4}{n-4} &= 5 \\
n^2-5n+4 &= 5(n-4) \\
n^2-10n+24 &= 0 \\
n &= \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} \\
&= \frac{10 \pm 2}{2} \\
&= 5 \pm 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, Marcos substituiu n por 6, já que $n \neq 4$.

Questão 14:

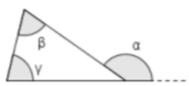
a) $\overline{AH}$ é a diagonal de uma face, ou seja, $AH = 6\sqrt{2}cm$. $\overline{MH}$ e $\overline{AM}$ são hipotenusas de triângulos cujos catetos medem $6cm$ e $3cm$, ou seja, $MH = AM = 3\sqrt{5}cm$. Trançando a altura MM' do triângulo AMH, relativa ao lado $\overline{AH}$, podemos encontrá-la aplicando o Teorema de Pitágoras, ou seja, $MM' = 3\sqrt{3}cm$. Por fim, a área do triângulo AMH é $\dfrac{6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{6}cm^2$.



Questão 15:

ALTERNATIVA C

Nesta solução vamos usar repetidamente o resultado de geometria elementar que diz que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Este resultado está ilustrado na figura ao lado e diz que $\alpha = \beta + \gamma$.



Vamos indicar por δ a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADE é isósceles, temos $D\hat{E}A = \delta$. O ângulo $E\hat{D}F$ é externo ao triângulo ADE, e pelo resultado mencionado acima temos $E\hat{D}F = \delta + \delta = 2\delta$. Como o triângulo DEF é isósceles temos também $E\hat{F}D = 2\delta$; o ângulo $F\hat{E}C$, externo ao triângulo FEA, mede então $2\delta + \delta = 3\delta$. Analogamente, concluímos que $C\hat{B}A = 4\delta$, e como o triângulo ABC é isósceles segue que $B\hat{C}A = 4\delta$. Logo $180° = 4\delta + 4\delta + \delta = 9\delta$, donde $\delta = 20°$.