Soluções da segunda lista de treinamento

Observação: as soluções das questões foram retiradas do site da OBMEP: http://www.obmep.org.br/index.htm

Questão 01:

ALTERNATIVA A

Cada uma das três pessoas, em princípio, pode beber água ou suco, logo há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para considerar, conforme a tabela.

	Ari	Bruna	Carlos
1	água	água	água
2	suco	água	água
3	água	suco	água
4	suco	suco	água
5	água	água	suco
6	suco	água	suco
7	água	suco	suco
8	suco	suco	suco

Devemos agora analisar as condições do problema para decidir qual das possibilidades é a correta. A primeira condição (se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água) elimina as possibilidades 3 e 8. A segunda condição (se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco) elimina a possibilidade 2. A terceira condição (se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água) elimina as possibilidades 4 e 6. Até o momento, restam as possibilidades 1, 5 e 7.

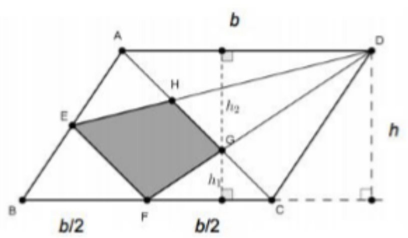
	Ari	Bruna	Carlos
1	água	água	água
5	água	água	suco
7	água	suco	suco

e como apenas um deles pede sempre a mesma bebida, chegamos a Ari, que sempre pede água.

Questão 02:

ALTERNATIVA B

Denotaremos por **A**F a área de uma figura F e por $\sim$ a relação de semelhança de triângulos. Sejam b a medida da base do paralelogramo e h sua altura. Então:



$$\boldsymbol{A}ABC = 24\ cm^2 \Rightarrow b \cdot h = 24\ cm^2$$

$$\Delta GCF \sim \Delta GDA \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{b/2}{b} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h_2 = 2h_1 \Rightarrow 3h_1 = h \Rightarrow h_1 = \frac{h}{3}$$

Portanto, $\boldsymbol{A}GFC = \frac{\frac{b}{2}\frac{h}{3}}{2} = \frac{b \cdot h}{12} = \frac{24}{12} = 2\ cm^2$.

Da mesma forma, também podemos concluir que $\boldsymbol{A}AHE = 2\ cm^2$.

Vamos calcular agora a área $\boldsymbol{A}BEF$, lembrando que triângulos semelhantes possuem áreas relacionadas com o quadrado da constante de proporcionalidade:

$$\Delta EBF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{\boldsymbol{A}EBF}{\boldsymbol{A}ABC} = \left(\frac{b/2}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{A}EBF = \frac{\boldsymbol{A}ABC}{4} = \frac{12}{4} - 3\ cm^2\ .$$

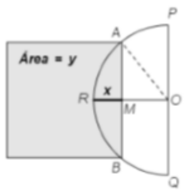
Agora vamos calcular a área do quadrilátero $EFGH$ por diferença:

$$\boldsymbol{A}EFGH = \boldsymbol{A}ABC - \boldsymbol{A}GFC - \boldsymbol{A}AEH - \boldsymbol{A}EBF = 12 - 2 - 2 - 3 = 5\ cm^2\ .$$

Questão 03:

ALTERNATIVA C

Como o diâmetro do círculo é 2, seu raio é 1. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OMA, obtemos $AM^2 = 1^2 - (1-x)^2 = 2x - x^2$. Esta é a área de um quadrado de lado $AM = \frac{AB}{2}$: a área do quadrado de lado AB é então $y = 4(2x - x^2) = 8x - 4x^2$. Notamos que como x varia em OR, temos $0 \leq x \leq 1$; para $x = 0$ temos $y = 0$ e para $x = 1$ temos $y = 4$. O gráfico de $y = 8x - 4x^2$ é uma parábola com concavidade para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo; este gráfico está representado na alternativa C.



Questão 04:

ALTERNATIVA D

Usaremos as seguintes notações:

- V : Volume do reservatório;
- v_1: vazão da primeira torneira;
- v_2: vazão da segunda torneira;
- T_1: tempo que leva a primeira torneira para encher o reservatório;
- T_2: tempo que leva a segunda torneira para encher o reservatório.

Observamos que $T_1 = \frac{V}{v_1}$ e $T_2 = \frac{V}{v_2}$. De acordo com o enunciado, vale a igualdade:

$\frac{5}{6}V = \frac{1}{3} \cdot v_1 \cdot \frac{V}{v_2} + \frac{1}{3} \cdot v_2 \cdot \frac{V}{v_1}$;

portanto $\frac{5}{2} = \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}$. Suponhamos que a primeira torneira é a de maior vazão ($v_1 > v_2$) e chamemos $x = \frac{v_1}{v_2} > 1$, então

$\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2) = 0$;

logo, $x = \frac{v_1}{v_2} = 2$. Levando em conta que as duas torneiras, juntas, enchem o reservatório em 2 horas e 30 minutos (150 min.), temos que

$$T_1 = \frac{V}{v_1} = \frac{150(v_1 + v_2)}{v_1} = 150\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 225.$$

Assim, o tempo necessário para a torneira de maior vazão encher o reservatório é de 225 minutos = 3 horas e 45 minutos.

Questão 05:

ALTERNATIVA D

Observe que a soma dos números das seis faces de um dado é 21. Assim, a soma de todos os números dos três dados é 63. Consequentemente, a maior soma que Benício pode obter é igual a 57, quando as faces em contato corresponderem aos números 1 e 2. De fato, a menor soma possível para os números das faces em contato garante a maior soma possível para os números das faces que não ficam em contato: 57 = 63 – 6 = 63 – (1 + 1 + 2 + 2).

Analogamente, a menor soma possível para Benício obter é igual a 41, quando as faces em contato corresponderem aos números 5 e 6: 41 = 63 – 22 = 63 – (5 + 5 + 6 + 6).

Como 16 = 57 – 41, ou seja, 16 é o resultado da diferença entre a maior soma e a menor soma possíveis, essa foi a situação observada por Benício. De fato, as demais diferenças entre as possíveis somas são menores que 16, uma vez que esse é o resultado entre as duas situações extremas. Consequentemente, as faces que não ficaram em contato nas duas observações de Benício correspondem aos números 3 e 4.

Outra solução:

A soma dos números de cada dado é 21. Se, na primeira montagem, os números em contato são a e b, a soma dos números que não ficaram em contato é S_1 = 3 x 21 – (2a + 2b) = 63 – 2(a + b). O fator 2 se explica notando que são sempre pares de faces em contato. Além disso, temos que a e b são necessariamente distintos.

Da mesma forma, na segunda montagem, se os números das faces em contato são c e d, a soma dos números que não ficaram em contato será S_2 = 63 – 2(c + d).

Sem perda de generalidade, podemos supor que $S_1 \geq S_2$.

A diferença entre esses números é 16, ou seja:

(63 – 2(a + b)) – (63 – 2(c + d)) = 16 → (c + d) – (a+ b) = 8.

Vamos analisar as possíveis soluções dessa equação, com a, b, c e d inteiros entre 1 e 6, e a ≠ b e c ≠ d.

O valor máximo de (c + d) – (a+ b) é obtido quando c + d é máximo e a + b é mínimo. Isso ocorre com c + d = 5 + 6 = 11 e a + b = 1 + 2 = 3. Assim, a diferença que Benício encontrou é, justamente, a máxima possível. Isso implica que os números que nunca estiveram em contato são 3 e 4.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm

Questã0 06:

ALTERNATIVA D

Ana garantirá o empate quando a quantidade de votos que ainda não tiverem sido apurados for igual à diferença entre os votos já apurados em favor da Ana e os votos já apurados em favor de Beto. De fato, para que o empate ocorra ninguém mais deve votar em Ana e todos os votos válidos devem ir para Beto.

Votos já apurados = N
Votos válidos = 80% de N

Votos apurados a favor de Ana = 60% de 80% de $N = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} \times N = 0{,}48N$
Votos apurados a favor de Beto = 40% de 80% de $N = \frac{40}{100} \times \frac{80}{100} \times N = 0{,}32N$
Votos que ainda serão apurados = $1450 - N$

Portanto, $0{,}48N - 0{,}32N = 1450 - N \Rightarrow 0{,}16N = 1450 - N \Rightarrow 1{,}16N = 1450$

$$\Rightarrow N = \frac{1450}{1{,}16} = 1250$$

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm

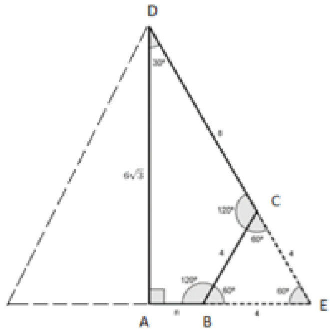
Questão 07:

ALTERNATIVA A

Prolongando-se dois lados do quadrilátero, obtemos um triângulo equilátero de lado 4 cm e um triângulo retângulo grande *DAE* que é metade de um triângulo equilátero de lado 12 cm, como indicado na figura.

Pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado *l* é $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$. Logo,

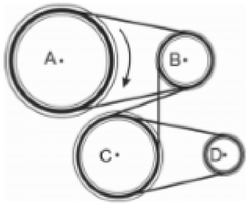
área de *ABCD* = (área do triângulo retângulo *DAE*) – (área do triângulo equilátero *CBE*) = $\frac{6.6.\sqrt{3}}{2} - \frac{16\sqrt{3}}{4} = 14\sqrt{3}$ cm^2.



Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm

Questão 08:

ALTERNATIVA D



A figura mostra que os discos A e B giram no mesmo sentido, os discos B e C em sentidos opostos e os discos C e D no mesmo sentido. Assim, D gira no sentido antihorário. Lembramos que o perímetro p de um círculo de raio r é dado por $p = 2\pi r$.

Como o raio do disco A é quatro vezes o de D, segue que o perímetro de A também é quatro vezes o perímetro de D. Logo D dá quatro voltas para cada volta de A.

Usamos no argumento acima o fato intuitivo de que os raios dos discos B e C são irrelevantes para a resolução desta questão; é interessante mostrar isto rigorosamente. No caso geral, podemos supor que os raios de A, B, C e D são a, b, c e d, respectivamente.

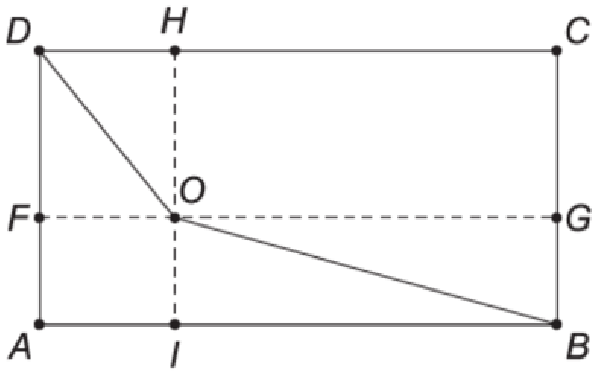
Se n_a, n_b, n_c e n_d são os números de voltas dados pelos discos A, B, C e D, respectivamente, então $n_a \cdot 2\pi a = n_b \cdot 2\pi b = n_c \cdot 2\pi c = n_d \cdot 2\pi d$.

$$n_a \cdot 2\pi a = n_d \cdot 2\pi d \Leftrightarrow \frac{n_d}{n_a} = \frac{a}{d}.$$

Se $n_a = 1$ então $n_d = \frac{8}{2} = 4$.

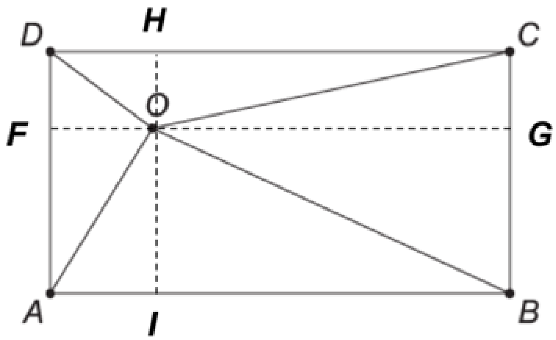
Questão 09:

a)



Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $OD^2 = OF^2 + FD^2 = OF^2 + OH^2$ e, da mesma forma, $OB^2 = OG^2 + GB^2 = OG^2 + OI^2$.
Assim,
$OD^2 + OB^2 = OF^2 + OH^2 + OG^2 + OI^2 = 4 + 9 + 36 + 1 = 50$.

b) Observemos a figura a seguir onde estão traçados os segmentos *HI* e *FG*, perpendiculares aos lados *AB* e *BC*, respectivamente.



De forma similar ao item a), usando o Teorema de Pitágoras, obtemos as igualdades:

1) $OD^2 + OB^2 = OF^2 + OH^2 + OG^2 + OI^2$,
2) $OA^2 + OC^2 = OF^2 + OI^2 + OH^2 + OG^2$,

de onde decorre a igualdade $OA^2 + OC^2 = OD^2 + OB^2$.

Questão 10:

1a solução (baseada em contagem)
Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Ana deve receber as bolas de Beatriz, de Cláudia e de Diana e deve jogar sua bola para uma dessas três amigas; logo a probabilidade de Ana receber três bolas é $\frac{3}{81} = \frac{1}{27}$.

2ª. solução:
Para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem necessariamente mandar sua bola para ela. Note que cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas. Assim, a probabilidade de que Beatriz mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$. Empregando o mesmo raciocínio, percebemos que a probabilidade de que Cláudia mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$ e de que Diana mande a bola para Ana também é $\frac{1}{3}$. Todos esses lançamentos são independentes, isto é, o resultado de um lançamento não afeta o resultado de outro lançamento. Assim, a probabilidade de Ana receber as três bolas será de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

Questão 11:

a) $(2@3) - (2\#3) = (2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 25 - (4 + 9) = 25 - 13 = 12$.

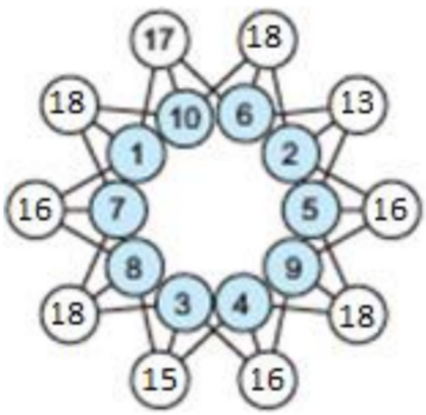
b) Se $(x-5) \# (y-6) = 0$ então $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 0$. A soma de dois quadrados é igual a 0 se, e somente se, cada uma das parcelas da soma for igual a 0. Logo, $x = 5$ e $y = 6$. Assim,

$$x @ y = (5 + 6)^2 = 11^2 = 121.$$

Questão 12:

a)

O preenchimento solicitado é o seguinte:



b)

Admita, por absurdo, que todos os números nos círculos brancos sejam menores do que 17, ou seja, que sejam todos iguais ou menores do que 16. Como são 10 círculos brancos, a soma de todos os números presentes nesses círculos deve ser no máximo 160. Entretanto, pelo método de preenchimento indicado no enunciado, essa soma deve ser igual a três vezes a soma dos números que aparecem nos círculos internos em cinza, ou seja, deve ser igual a

$$3 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 165$$

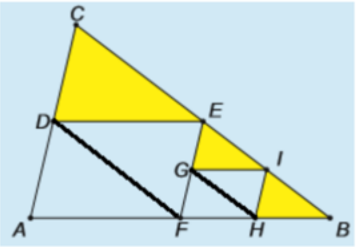
Como 165 > 160, chegamos a uma contradição. Logo, não existe uma distribuição nos círculos internos de modo que nos círculos externos só apareçam números menores do que 17.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f2n3.htm

Questão 13:

ALTERNATIVA B

Os quatro triângulos *CDE*, *DAF*, *FED* e *EFB* são congruentes e, portanto, têm áreas iguais a ¼ da área do triângulo maior *ABC*; sendo assim, a área do triângulo *CDE* é 12 cm^2. Por sua vez, o triângulo *EFB* também pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes, como indicado na figura, e, desse modo, os triângulos *EGI* e *IHB* têm áreas iguais a 12/4 = 3 cm^2. Logo, a área destacada em amarelo, sendo a soma das áreas de *CDE* com *EGI* e *IHB*, é igual a 12 + 3 + 3 = 18 cm^2.



Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm

Questão 14:

ALTERNATIVA B

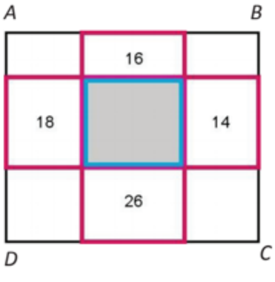
Se $f(a) = b$ então $5a^2 + a.a + b = 6a^2 + b = b$, logo $a = 0$.
Como $f(b) = 5b^2 + a.b + b = a$, então $5b^2 + b = 0$, ou seja, $b.(5b + 1) = 0$. Portanto, $b = 0$ ou $b = -1/5$ e, como a e b devem ser diferentes, $b = -1/5$.

Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2017/f1n3.htm

Questão 15:

ALTERNATIVA C

1ª solução: O perímetro do retângulo maior *ABCD* é igual ao perímetro da figura em forma de cruz formada pelos cinco retângulos (os que possuem números marcados em seu interior e o retângulo cinza), como na ilustração ao lado. O perímetro dessa figura é igual à soma das medidas de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as de cada um de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza. A soma das medidas de todos os lados desses quatro retângulos externos é 16 + 18 + 26 + 14 = 74 e o perímetro da figura em forma de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo *ABCD*. Logo, o perímetro do retângulo cinza é 74 – 54 = 20 cm.



Vídeo explicando: http://www.obmep.org.br/provas_static/2016/f1n32016.htm