Treinamentos OMOC

Nível 3

Segunda fase

Fonte: banco de questões OBMEP

1. Rosa ganhou um vidro de perfume no formato de um cilindro de 7 cm de raio da base e 10 cm de altura. Depois de duas semanas usando o perfume restou 0, 45 l no vidro. Qual a fração que representa o volume que Rosa já usou?

Resolução:

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura. Como o raio da base é 7 cm, a área da base é: $\pi \times 7^2$, e então o volume do vidro é

$\pi \times 7^2 \times 10\, cm^3 = 490\pi\, cm^3 = \frac{490\pi}{1000} dm3 = 0,49\, \pi\, litros$, lembrando que $1000\, cm^3 = 1\, dm^3 = 1\, litro$.

Depois de duas semanas, restaram 0, 45 litros de perfume, então ela gastou $(0,49\, \pi - 0,45)\, litros$. Portanto, a fração que representa o volume gasto é:

$$\frac{volume\ gasto}{volume\ total} = \frac{0,49\, \pi - 0,45}{0,49\, \pi} = \frac{49\, \pi - 45}{49\, \pi}$$

2. Um arco de circunferência mede 300° e o seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio em metros?

Solução 1:

Se o raio é r então o comprimento de um arco de θ graus é $2\pi \frac{\theta}{360r}$.

Assim, no problema dado, temos que

$$2\pi \frac{300}{360r} = 2000m \Rightarrow r = \frac{2000x3}{5\pi} \simeq 382{,}17m$$

Solução 2:

Como a circunferência tem 360°, um arco de 300° representa $\frac{5}{6}$ da circunferência, logo, seu comprimento é $5/6$ do comprimento da circunferência, isto é:

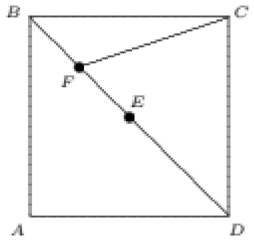
$$\frac{5}{6} x2\pi\, r = 2000m \Rightarrow r = \frac{2000x6}{10\pi} = 1200\pi \approx 382{,}17\text{m}$$

3. Em um táxi podem se sentar um passageiro na frente e três atrás. De quantas maneiras podem se sentar os quatro passageiros se um deles quer ficar na janela?

Resolução:

O passageiro que quer ficar na janela tem 3 possíveis lugares para se sentar, o seguinte pode-se sentar em qualquer lugar livre, logo tem 3 possíveis lugares, o seguinte dois possíveis lugares, e o último não tem escolha. Concluímos que o número de formas de se sentar é $3 \times 3 \times 2 = 18$.

4. Na figura $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede 1 cm, E é o ponto médio da diagonal BD e F o ponto médio do segmento BE. Qual é a área do triângulo ΔBCF?



Resolução:

As diagonais do quadrado $ABCD$ dividem o quadrado em 4 triângulos iguais, logo a área do triângulo ΔBCE é

$$1 \div 4 = 0,25\ cm^2$$

Como o comprimento de BF é a metade de BE e a altura relativa aos lados BF e BE é CE, então a área do triângulo CBF é a metade da área do triângulo CBE. Assim, a área de dito triângulo é $0,25 \div 2 = 0,125\ cm^2$.

5. Um sanduíche e um prato de refeição custam em média R$ 5, 00 e R$ 7, 00, respectivamente. De quantas maneiras pode-se comprar sanduíches e pratos de refeição com R$ 90, 00, sem deixar troco?

Resolução:

Se S corresponde ao número de sanduíches e P o número de pratos de refeição, então $5S + 7P = 90$. Precisamos encontrar soluções inteiras P e Q para essa equação. Temos:

$$5S + 7P = 90 \Rightarrow P = \frac{90 - 5}{7} = 5x\frac{(18 - S)}{7}$$

Como P é um número natural temos que 7 tem que dividir $18 - S$, assim $S = 4$, 11 ou 18, e em cada um destes casos P é igual a 10, 5 e 0, respectivamente.

Portanto, temos somente três formas de fazer a compra.

6. Se 15% dos membros de uma população afetados por uma doença 8% morreram, a percentagem da mortalidade em relação à população inteira é de quanto?

Resolução:

A proporção de população que fica doente pela enfermidade é $\frac{15}{100}$ e dos que ficam doentes, a proporção que morre é $\frac{8}{100}$. Logo, a proporção de população que morre pela doença é $\frac{15}{100} x \frac{8}{100}$

$$\frac{15x8}{100^2} = \frac{120}{10000} = \frac{12}{1000} = \frac{1,2}{100} = 1,2\%$$

7. As cinco cartas abaixo estão sobre uma mesa, e cada uma tem um número numa face e uma letra na outra. Simone deve decidir se a seguinte frase é verdadeira: “Se uma carta tem uma vogal numa face, então ela tem um número par na outra” Qual o menor número de cartas que ela precisa virar para decidir corretamente?

Resolução:

Ela não precisa virar a carta que tem o número 2, porque sendo vogal ou consoante, ela cumpre a condição, de igual forma. Ela também não precisa virar a carta com a letra M. A carta que tem o número 3 tem que ser virada, para comprovar que na outra face tem uma consoante, e também as cartas com a letra A e a letra E têm que ser viradas para verificar que os números na outra face são pares. Assim, ela precisa virar somente 3 cartas.

8. Uma companhia tem um lucro de 6% nos primeiros R$ 1000, 00 reais de venda diária, e 5% em todas as vendas que excedem R$ 1000, 00 reais, nesse mesmo dia. Qual é o lucro dessa companhia num dia que as vendas alcançam R$ 6000, 00 reais?

Resolução:

Nos primeiros $R\$\ 1000$ reais a companhia tem lucro de R$ 60 reais, e para os R$ 5000 reais restantes tem lucro de $5000 \times 5\% = 250\, reais$. Logo o lucro da empresa nesse dia é $R\$\ 310$.

9. Em 1972 encher o tanque de gasolina de um carro pequeno custava R$29, 90, e em 1992, custava R$149, 70 para encher o mesmo tanque. Qual dos valores abaixo melhor aproxima o percentual de aumento no preço da gasolina nesse período de 20 anos?

Resolução:

O aumento do valor foi: $149,70 - 29,90 = 119,80\, reais$,que corresponde a:

$$\frac{119{,}80}{29{,}90} \times 100\% = 400,66\%.$$

10. Um menino tentou alinhar 480 latas em forma de um triângulo com uma lata na 1ª linha, 2 latas na 2ª e assim por diante. No fim sobraram 15 latas. Quantas linhas tem esse triângulo?

Resolução:

Suponhamos que o triângulo está composto por n linhas, logo foram usadas $1 + 2 + 3 + \cdots + n\, latas$, assim $480 - 15 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 + n - 930 = 0$.

Resolvendo a equação $n^2 + n - 930 = 0$, obtemos:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\ x\, 930}}{2} = \frac{-1 \pm 61}{2}\ .$$

Assim, n = 30 que é única solução positiva desta equação. Logo o triângulo tem 30 linhas.